Exercices pour réviser : séries, séries entières, séries de Fourier

Séries numériques

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries suivantes

$$(1)\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{n^3}\qquad (2)\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n)}{n^2}\qquad (3)\sum_{n\geq 1}\frac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}$$

$$(4)\sum_{n\geq 1}\frac{n+5}{n!(n+4)}\qquad (5)\sum_{n\geq 1}\frac{n^5}{n!}\qquad (6)\sum_{n\geq 1}\frac{(n+2)^5}{n!}$$

$$(7)\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^3}\qquad (8)\sum_{n\geq 1}\frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}}\qquad (9)\sum_{n\geq 1}(e^{-n}+1)$$

$$(10)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+2^n}\qquad (11)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right)\qquad (12)\sum_{n\geq 1}\ln\left(\left|\cos(\frac{2}{n})\right|\right)$$

$$(13)\sum_{n\geq 1}\frac{2^{-n}}{3^n+2}\qquad (14)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\log(n^2+n+1)}\qquad (15)\sum_{n\geq 1}(\ln(n))^{-n}$$

Correction

1. On a une série à termes positifs. Un équivalent du terme général est $\frac{n+1}{n^3}\sim\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha=2>1$. Donc d'après le critère par équivalent $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n+1}{n^3}$ converge.
2. Le terme général de cette série n'est plus toujours positif, mais on peut étudier la convergence absolue. Or
$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}.$$
La série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha=2>1$.
Donc d'après le critère par comparaison $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.
3. de même que précedemment on étudie l'absolue convergence de la série.
$$\left|\frac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}\right|\leq\frac{n+3}{n(n+1)^2}\qquad(1)$$

Or $\sum \frac{n+3}{n(n+1)^2}$ est une série à termes positifs et son terme général vérifie $\frac{n+3}{n(n+1)^2} \sim \frac{n}{n.n^2} = \frac{1}{n^2}$ Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha = 2 > 1$. Donc d'après le critère par équivalent $\sum \frac{n+3}{n(n+1)^2}$ converge.

Par le critère par comparaison, du fait que la série de terme général $\frac{n+3}{n(n+1)^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}$ converge absolument, donc converge.

4. On a une série à terme positif. Du fait de la présence de la factorielle, on choisit d'appliquer le critère de d'Alembert pour les séries numériques. On note $u_n = \frac{n+5}{n!(n+4)}$et on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+1+5}{(n+1)!(n+1+4)} \times \frac{n!(n+4)}{n+5} \\
&= \frac{(n+6)(n+4)}{(n+1)(n+5)^2}
\end{aligned}$$

On voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2(1+\frac{6}{n})(1+\frac{4}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{5}{n})^2} = \dfrac{(1+\frac{6}{n})(1+\frac{4}{n})}{n(1+\frac{1}{n})(1+\frac{5}{n})^2}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 < 1$. Donc d'après le critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge.

5. On a une série à terme positif. Du fait de la présence de la factorielle, on choisit d'appliquer le critère de d'Alembert pour les séries numériques. On note $u_n = \frac{n^5}{n!}$et on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^5}{(n+1)!}\frac{n!}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5(n+1)} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{n})^5}{n+1}
\end{aligned}$$

On voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} =\to 0 < 1$. Donc d'après le critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge.

6. On applique une nouvelle fois le critère de d'Alembert en posant $u_n = \frac{(n+2)^5}{n!}$ on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1+2)^5}{(n+1)!}\frac{n!}{(n+2)^5} = \frac{(n+3)^5}{(n+2)^5}\frac{1}{n+1}$$

Or comme précédemment on a $\frac{(n+3)^5}{(n+2)^5} \to 1$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 < 1$.

Par le le critère de d'Alembert pour les séries numériques $\sum u_n$ converge.

7. On a $\ln(n) \leq n$ et donc pour tout $n \geq 1$ $\frac{\ln(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.

Donc par le critère par comparaison $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

8. On a

$$\begin{array}{rcl} -1 & \leq \cos(n) & \leq 1 \\ -1 & \leq -\cos(n) & \leq 1 \\ 2-1 & \leq 2-\cos(n) & \leq 1+2 \\ 1 & \leq 2-\cos(n) & \leq 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \leq \frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}} & \leq \dfrac{3}{\sqrt{n}} \end{array}$$

   On a donc le terme général de la série qu'on étudie qui est positif d'une part.

   D'autre part $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, donc elle diverge.

   Donc par le critère par comparaison des séries à terme positif la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

9. Pour $n \to +\infty$ $e^{-n} + 1 \to 1$ car $e^{-n} \to 0$.

   Donc le terme général de cette série ne tend pas vers 0. Donc la série diverge.

10. On a pour tout n $0 \leq \frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$. La série $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$ est une série géométrique de paramètre $r = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$, donc elle converge.
    Par le critère par comparaison des séries à terme général positif, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

11. pour x au voisinage de 0 on a $\tan(x) \sim x$, donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et donc $\frac{1}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.

    Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.
    Par le critère par équivalent des séries à terme général positif, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

12. pour x proche de 0 on a $\cos(x) - 1 \sim \frac{-x^2}{2}$ et on a aussi $\ln(f(x)+1) \sim f(x)$ si $f(x)$ est proche de 0.

    Or on peut écrire $\ln\left|\cos(\frac{2}{n})\right| = \ln\left|\cos(\frac{2}{n}) - 1 + 1\right|$. Comme $\frac{2}{n} \to 0$ on a donc $\cos(\frac{2}{n}) - 1 \sim \frac{-2}{n^2}$.

    Pour n assez grand $\cos(\frac{2}{n}) - 1 + 1 \sim 1 - \frac{2}{n^2} > 0$, donc on peut enlever les valeurs absolues.

    Donc vu que $\frac{-2}{n^2} \to 0$ on a

$$\begin{array}{rcl} \ln\left|\cos(\dfrac{2}{n})\right| & = & \ln\left|\cos(\dfrac{2}{n}) - 1 + 1\right| \\ & \sim & \cos(\dfrac{2}{n}) - 1 \sim -\dfrac{2}{n^2} \end{array}$$

    Or la série $-2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.

Par le critère par équivalent des séries à terme général de signe constant (ici le terme général est négatif), $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left|\cos(\frac{2}{n}) - 1 + 1\right|$ converge.

13. On peut majorer $\frac{2^{-n}}{3^n+2} < \frac{2^{-n}}{3^n} = 2^{-n}3^{-n} = 6^{-n}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 0} 6^{-n}$ est une série géométrique de paramètre $r = 6^{-1} = \frac{1}{6} < 1$. Donc elle converge.

    Par le critère par comparaison des séries à terme général positif la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2^{-n}}{3^n+1}$ converge.

14. Remarquons que pour n assez grand on a $\ln(n^2 + n + 1) \leq n$. En effet on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = 0$ car la puissance de n l'emporte sur ln.

    Donc on a $\frac{1}{\ln(n^2+n+1)} \geq \frac{1}{n}$.
    Or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, donc par le critère par comparaison des séries à terme général positif, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$ diverge.

15. On utilise ici le critère de Cauchy. En effet en posant $u_n = (\ln(n)^{-n}$ on a $u_n^{1/n} = \ln(n)^{-1} \to 0$.

    Donc le critère de Cauchy pour les séries à terme général positif donne que $\sum\limits_{n\geq 2} \ln(n)^{-n}$ converge.

Exercice 2.

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indiquer en fonction de α si les séries suivantes convergent absolument en distinguant selon les valeurs du paramètre α.

$$(1) \sum_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2\sin^{2n}(\alpha)} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^3\alpha}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} e^{n(\alpha-n)} \qquad (5) \sum_{n\geq 1} ne^{-n\alpha} \qquad (6) \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^2+n}{n^2}$$

1. On regarde la convergence absolue de la série. On a $|2^{-n}e^{in\alpha}| = 2^{-n}$. C'est le terme général d'une série géométrique de paramètre $r = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$, et donc elle converge. Donc $\sum\limits_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha}$ converge absolument.

    Donc $\sum\limits_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha}$ converge pour toute valeur de α.

2. Si $\sin(\alpha) = 0$ alors le terme général de la série n'est pas défini, donc si $\alpha = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ le terme général n'est pas défini.

    D'autre part appliquons maintenant le critère de Cauchy et calculons en posant $u_n = \frac{2^n}{n^2\sin^{2n}(\alpha)} > 0$ la limite de $u_n^{1/n}$.

On a $u_n^{1/n} = \frac{2}{n^{2/n}\sin^2(\alpha)}$. Or $n^{2/n} = e^{2\frac{\ln(n)}{n}} \to e^0 = 1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$. Or comme $0 \leq \sin^2(\alpha) \leq 1$ on a $\frac{2}{\sin^2(\alpha)} \geq 2 > 1$.

Par le critère de Cauchy la série diverge donc pour toute valeur de α.

3. — Pour $\alpha = 0$ on a le terme général qui vaut $\frac{n}{1+n^3\alpha} = n \to +\infty$. Donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge.
   — Pour $\alpha \neq 0$ on a $\frac{n}{1+n^3\alpha} \sim \frac{n}{\alpha n^3} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^2}$.

   Or la série $\frac{1}{\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série du type Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.

   Donc par le critère par équivalent la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{1+n^3\alpha}$ converge.

4. On applique le critère de Cauchy sur le terme général de cette série en notant $u_n = e^{n(\alpha-n)}$.

   On obtient $u_n^{1/n} = e^{\alpha-n} \to 0$ car $\alpha - n \to -\infty$.

   Donc par le critère de Cauchy $\sum u_n$ converge quelle que soit la valeur de α.

5. De même on applique le critère de Cauchy cette fois sur $u_n = ne^{-n\alpha}$. On a $u_n^{1/n} = n^{1/n}e^{-\alpha}$. Or vu que $n^{1/n} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \to e^0 = 1$ on a $u_n^{1/n} \to e^{-\alpha}$.
   On a donc
   — Pour $\alpha < 0$ alors $e^{-\alpha} > 1$ et la série diverge d'après le critère de Cauchy.
   — Pour $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha} > 1$ et la série converge d'après le critère de Cauchy.
   — Pour $\alpha = 0$ alors $e^{-\alpha} = 1$ et on ne peut pas conclure avec le critère de Cauchy. Cependant on remarque que dans ce cas $u_n = ne^{-n\alpha} = n \to +\infty$, donc la série diverge vu que son terme général ne tend pas vers 0.

6. On a l'équivalent $\frac{\alpha^2+n}{n^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$.

   Donc par le critère par équivalent $\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha^2+n}{n^2}$ diverge.

Séries entières

Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(1)\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2} \qquad (2)\sum_{n\geq 1} n^n z^n \qquad (3)\sum_{n\geq 1} z^{2n}$$

$$(4)\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}z^n \qquad (5)\sum_{n\geq 1} n(n-1)z^n \qquad (6)\sum_{n\geq 0}\frac{2^n-3^n}{5^n}z^n$$

Correction :

(1) La série est du type $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

Cela donne

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}$$

On a $\frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ et $R = 1$.

(2) La série est du type $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = n^n$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons le critère de Cauchy pour le calcul du rayon de convergence.

$$|a_n|^{1/n} = n$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ et donc $R = 0$.

(3) La série est du type $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ avec $a_k = 1$ si $k = 2n$ est pair et 0 sinon. Revenons à la définition du rayon de convergence et calculons R tel que si $|z| < R$ alors $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ converge et tel que si $|z| > R$ la série diverge.

Remarquons que à z fixé la série est du type $\sum_{n\geq 1} (z^2)^n$. Il s'agit donc d'une série géométrique de paramètre z^2. Elle converge si et seulement si $|z|^2 < 1$ c'est à dire si et seulement si $|z| < 1$.

Donc si $|z| < 1$ la série converge et si $|z| > 1$ la série diverge. Donc $R = 1$.

(4) La série est du type $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n+1}))}{\ln(n)}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)\to 0}$ quand $n \to +\infty$. Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc $R = 1$.

(5) La série est du type $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = n(n-1)$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons

le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)n}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$. Donc $R = 1$.

(6) Ici le plus simple est de revenir à la définition. Soit $z \in \mathbb{C}$. Examinons à quelle condition sur $|z|$ la série converge.

On a $\left|\frac{2^n-3^n}{5^n} z^n\right| = \frac{3^n(1-\frac{2^n}{3^n})}{5^n}|z|^n \sim \frac{3^n}{5^n}|z|^n$ quand $n \to +\infty$.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n}{5^n}|z|^n = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{3}{5}|z|\right)^n$ est une série géométrique de paramètre $\frac{3}{5}|z|$ qui converge si et seulement si $\frac{3}{5}|z| < 1$ c'est à dire si et seulement si $|z| < \frac{5}{3}$. Donc $R = \frac{5}{3}$.

Exercice 4.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Correction :

On remarque que la série qu'on examine est en fait la série primitive de $\sum\limits_{n\geq 0} z^{2n}$. Cette série s'écrit aussi $\sum\limits_{n\geq 0} (z^2)^n$. On reconnait une série géométrique de paramètre z^2. Elle converge si et seulement si $|z^2| < 1$, c'est à dire $|z| < 1$. Donc $R = 1$.

Comme les séries dérivée et séries primitives dans le cas des séries entières ont même rayon de convergence on a donc $R = 1$.

Pour $z = R = 1$ on examine donc $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2n+1}$. C'est une série numérique du type $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{2n+1}$. En particulier le terme général de la série est positif et toujours non nul.

On voit bien que cette série ressemble à une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, donc surement divergente...

D'après le critère par équivalent on a pour $n \to +\infty$ $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, et donc $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, et par le critère par équivalent des séries à terme positif, $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge.

Donc pour $z = R$ la série diverge.

Exercice 5.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{nz^n}{n^2-1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Correction :
On remarque que la série est du type $\sum_{n\geq 2} \dfrac{nz^n}{n^2-1} = \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n}{n^2-1}$et $a_n \neq 0$. Appliquons le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

Cela donne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(n+1)^2-1} \times \frac{n^2-1}{n} = \frac{n+1}{n^2+2n+1-1}\frac{n^2-1}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{n^2-1}{n^2+2n}$$

On a $\frac{n+1}{n} \to 1$ quand $n \to +\infty$ et d'autre part $\frac{n^2-1}{n^2+2n} = \frac{n^2(1-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n})} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \to 1$.

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/1 = 1$ et $R = 1$.

Pour $z = R = 1$ on doit étudier $\sum_{n\geq 2} \dfrac{n}{n^2-1}$. On a de nouveau une série numérique à terme positif du type $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{n}{n^2-1}$.

Or $u_n = \frac{n}{n^2-1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ pour $n \to +\infty$.

Si vous n'êtes pas convaincu(e) de cet équivalent le mieux est de noter $v_n = \frac{1}{n}$ *et de montrer que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$ divergente, donc par le critère par équivalent des séries à terme positif $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

Donc $\sum_{n\geq 2} \dfrac{n}{n^2-1}$ diverge.

Exercice 6.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^{3n+1}}{3n+1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Correction :
On remarque que la série qu'on examine est en fait la série primitive de $\sum_{n\geq 0} z^{3n}$. Cette série s'écrit aussi $\sum_{n\geq 0} (z^3)^n$. On reconnait une série géométrique de paramètre z^3. Elle converge si et seulement si $|z^3| < 1$, c'est à dire $|z| < 1$. Donc $R = 1$.

Comme les séries dérivée et séries primitives dans le cas des séries entières ont même rayon de convergence on a donc $R = 1$.

Pour $z = R = 1$ on examine donc $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{3n+1}$. C'est une série numérique du type $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{3n+1}$. En particulier le terme général de la série est positif et toujours non nul.

On voit bien que cette série ressemble à une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, donc surement divergente...

D'après le critère par équivalent on a pour $n \to +\infty$ $\frac{1}{3n+1} \sim \frac{1}{3n}$.

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n}$ diverge, et par le critère par équivalent des séries à terme positif, $\sum \frac{1}{3n+1}$ diverge.

Donc pour $z = R$ la série diverge.

Exercice 7.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f .

Correction :
On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n(n+1)(2n+1)}$. On peut donc écrire, en posant $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$,

$$f(x) = xg(x^2)$$

Donc le domaine de définition de f est lié à celui de g.

Déterminons le domaine de g.

On remarque que $g(x)$ s'écrit $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \neq 0$. On applique maintenant le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence, ce qui donne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)} n(n+1)(2n+1) = \frac{n(2n+1)}{(n+2)(2n+3)}$$

On voit que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ et donc $R = 1$.

Donc g est définie pour $|x| < 1$ et donc $x \mapsto g(x^2)$ est définie pour $|x|^2 < 1$ et donc pour $|x| < 1$.

D'autre part pour $x = 1$ on remarque que $\left|\frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^3}$.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 3 > 1$, donc convergente. Donc par le critère par équivalent des séries à terme positif $\sum \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ est convergente pour $x = 1$, donc convergente.

Donc g est définie pour $x^2 = 1$, et donc f est définie pour $x = 1$ et $x = -1$.

Donc le domaine de définition de f est donc l'intervalle $[-1{,}1]$.

Exercice 8.

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!} x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f.

Correction :

On a une série du type $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n^2+4n-1}{n!}$. On peut donc calculer son rayon de convergence grâce au critère de d'Alembert pour les séries entières.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^2+4(n+1)-1}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2+4n-1} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{n^2+2n+1+4n+4-1}{n^2+4n-1} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{n^2(1+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ et donc $R = +\infty$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{1-x} \qquad (E)$$

Soit y une solution développable en série entière de (E) qu'on écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. Montrer que les b_n vérifient l'équation récurrente $(n+1)b_{n+1} - (n+2)b_n = 0$. En déduire b_n en fonction de n.

   Correction :
   On remarque qu'on peut écrire l'équation différentielle $(1-x)y'(x) = 2y(x)$, c'est à dire $y'(x) - xy'(x) = 2y(x)$
   On a $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$, donc on obtient

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \qquad (2)$$

   On effectue un changement de variables dans la première somme et avec $n' = n-1$ on obtient

$\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1)b_{n'+1}x^{n'}$.

Ce qui donne en remplaçant dans (2)

$$\sum_{n'=0}^{+\infty}(n'+1)b_{n'+1}x^{n'} - \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2b_n x^n$$

et on a donc pour tout x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n'=0}^{+\infty}(n'+1)b_{n'+1}x^{n'} - \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad (4)$$

$$b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^n = 2b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n x^n \quad (5)$$

$$b_1 - 2b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)b_{n+1} - nb_n - 2b_n]x^n = 0 \quad (6)$$

Cela est vrai si pour tout $n \geq 1$ on a $(n+1)b_{n+1} - nb_n - 2b_n = 0$ et aussi $b_1 - 2b_0 = 0$, ce qui est bien la relation voulue pour tout $n \geq 0$.

2. Montrer que $y(x) = \frac{K}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1,1[$.

Correction :
On a donc d'après la question précédente $b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n$. Comme on a aussi $b_n = \frac{n+1}{n}b_{n-1}$ on obtient en remplaçant de proche en proche

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}\frac{n+1}{n}\frac{n}{n-1}...\frac{3}{2}b_1 = \frac{n+2}{n+1}\frac{n+1}{n}\frac{n}{n-1}...\frac{3}{2}2b_0$$

Donc on a en simplifiant l'expression

$b_{n+1} = (n+2)b_0$, ce qui donne $b_n = (n+1)b_0$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n'=1}^{+\infty} n'x^{n'-1}$ en posant $n+1 = n'$.

On reconnait qu'il s'agit de la série dérivée de $\sum_{n'=0}^{+\infty} x^{n'} = \frac{1}{1-x}$ qui a pour rayon de convergence 1. Donc on a $\sum_{n'=1}^{+\infty} n'x^{n'-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$, et on a donc pour $|x| < 1$

$$y(x) = b_0 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{b_0}{(1-x)^2}$$

ce qui est bien le résultat qu'on cherche.

Exercice 10.

Donner le développement en série entière de la fonction $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt$ ainsi que son domaine de validité.

Correction :
On sait que arctan a pour dérivée $\frac{1}{1+t^2}$. Or pour $t^2 < 1$, donc pour $|t| < 1$ on a le développement

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{1-(-t^2)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\end{aligned}$$

Le développement de arctan qui s'annule en 0 est donc la série primitive qui s'annule en 0, ce qui donne pour $|t| < 1$

$$\arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \tag{7}$$

On a donc

$$\frac{\arctan(t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1} \tag{8}$$

De nouveau la série primitive a même rayon de convergence (ici $R = 1$) et le développement en série entière que l'on cherche est donc
$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

Séries de Fourier

Dans toute cette partie on considérera des fonctions $T = 2\pi$ périodiques. Les coefficients de Fourier s'écriront donc

- pour $n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-int\frac{2\pi}{T}}dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$
- pour $n \geq 1$ $a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(nt\frac{2\pi}{T})dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$
- pour $n \geq 0$ $b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(nt\frac{2\pi}{T})dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$
- $a_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt.$

La série de Fourier d'ordre N de f s'écrit donc $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$ ou $S_N(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=0}^{N} b_n(f)\sin(nt)$

Exercice 11.

Pour chacune des fonctions 2π périodiques suivantes

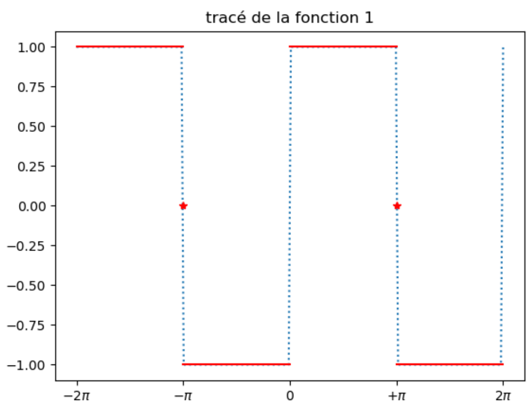
— Tracer le graphe de la fonction f pour t dans $[-2\pi,2\pi]$.
— Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ est finie.
— Calculer les coefficients de Fourier de f et donner sa série de Fourier.
— A t fixé $S_N(f)(t)$ converge-t-elle vers une limite quand $N \to +\infty$ et laquelle ?
— *Pour les étudiants de St-Jérôme :* la série de Fourier de f converge-t-elle en énergie ?

On étudiera donc les fonctions f suivantes

1. f est impaire, 2π périodique et vaut 1 si $0 \leq t < \pi$ et $f(\pi) = 0$.
2. f est 2π périodique et vaut $|t|$ sur $[-\pi,\pi[$.
3. f est 2π périodique et vaut t^2 sur $[0,2\pi[$.
4. f est 2π périodique et vaut t^2 sur $[-\pi,\pi[$.
5. f est 2π périodique et vaut $|\sin(t)|$ sur $[-\pi,\pi[$.

Correction :

1. On étudie donc le cas f est impaire, 2π périodique et vaut 1 si $0 \leq t < \pi$ et $f(\pi) = 0$.
   (a) A faire par exemple avec Python, ce qui donne



   (b) pour tout t on a $|f(t)| \leq 1$, donc $|f(t)|^2 \leq 1$ donc la fonction $|f|^2$ est bornée et comme on intégre sur un intervalle borné, son intégrale d'après ce qu'on a vu dans le cours sur les intégrales généralisées converge nécessairement.
   (c) On choisit comme intervalle d'intégration $[-\pi,\pi]$ vu que la formule pour définir la fonction est donnée sur cet intervalle. On a vu que f est impaire

$$c_0(f) = a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

D'autre part pour $n \neq 0$ et vu que f est impaire $f(t) = -1$ sur $]-\pi,0[$

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -e^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left([-e^{-int}/(-in)]_{-\pi}^{0} + [e^{-int}/(-in)]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left([-1+e^{in\pi}] + [e^{-in\pi}-1]\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left(-2+2(-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{in\pi}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

car on rappelle que $e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$ de même que $e^{-in\pi} = (e^{-i\pi})^n = (-1)^n$.

On a aussi $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$ en calculant directement ou en appliquant les formules
— pour $n \geq 1$ entier $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$,
— pour $n \geq 1$ entier $c_n(f) = \frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$
— $a_0(f) = c_0(f)$
Quand on demande de calculer les coefficients de Fourier on calcule soit la suite des $\{c_n(f)),n \in \mathbb{Z}\}$ *soit celle des* $\{a_n(f),n \in \mathbb{N},b_k(f),k \in \mathbb{Z}^*\}$.
Ensuite on a

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{in\pi}\left(1-(-1)^n\right)e^{int} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin(nt).$$

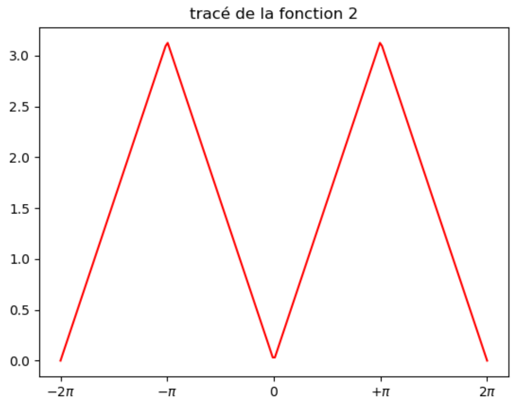
(d) La fonction est ici constante par morceaux, elle est donc C^1 par morceaux. Elle a en tout point t une limite à droite et une limite à gauche notées $f(t^+)$ et $f(t^-)$, et sa dérivée existe partout sauf aux points de discontinuités du type $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, où elle admet une limite à droite et à gauche.

Donc le théorème de Dirichlet s'applique et on a convergence de $S_N(f)(t)$ vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$, ce qui donne
— pour tout $t \neq k\pi$ f est continue en t donc $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ et $S_N(f)(t)$ converge vers $f(t)$
— pour tout $t = 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ f est discontinue et $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ donc $S_N(f)(t)$ converge vers $0 \neq f(0) = f(2k\pi) = 1$.
— pour $t = 2k\pi + \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ f est discontinue et $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ donc $S_N(f)(t)$ converge vers $0 = f(\pi) = f(2k\pi + \pi)$.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier converge en énergie.

2. On étudie f 2π périodique et qui vaut $|t|$ sur $[-\pi,\pi[$.

(a) A faire par exemple avec Python, ce qui donne



(b) pour tout t on a $|f(t)| \leq \pi$, donc $|f(t)|^2 \leq \pi^2$ donc la fonction $|f|^2$ est bornée et comme on intégre sur un intervalle borné, son intégrale d'après ce qu'on a vu dans le cours sur les intégrales généralisées converge nécessairement.

(c) On choisit comme intervalle d'intégration $[-\pi,\pi]$ vu que la formule pour définir la fonction est donnée sur cet intervalle. On a vu que f est paire

$$\begin{aligned} c_0(f) &= a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tdt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a ensuite pour $n \neq 0$ et en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -te^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} te^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left([-te^{-int}/(-in)]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{-in}\int_{-\pi}^{0} -e^{-int}dt + [te^{-int}/(-in)]_{0}^{\pi} - \frac{1}{-in}\int_{0}^{\pi} e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left((-\pi)e^{in\pi} + \int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt + \pi e^{-in\pi} - \int_{0}^{\pi} e^{-int}dt\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left(-\pi(-1)^n + \pi(-1)^n + \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left(\frac{1-e^{in\pi}}{-in} - \frac{e^{-in\pi}-1}{-in}\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left(\frac{1-e^{in\pi}}{-in} + \frac{-e^{-in\pi}+1}{-in}\right) = \frac{1}{-2in\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{-in} + \frac{-(-1)^n+1}{-in}\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\frac{2-2(-1)^n}{-in} \\
&= \frac{-1+(-1)^n}{n^2\pi}
\end{aligned}$$

d'où $c_n(f) = \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$ ou $a_n(f) = 2\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$ et $b_n(f) = 0$.

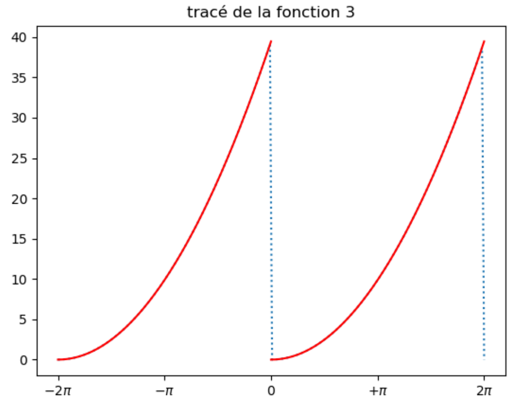
Donc $S_N(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} e^{int} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{N} 2\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos(nt)$.

(d) On remarque que f est continue en tout point, donc elle admet bien sur une limite à droite et à gauche en tout point. De plus elle est dérivable sauf aux points du type $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et sa dérivée admet en ces points une limite à droite et à gauche.

Donc le théorème de Dirichlet s'applique et on a $S_N(f)(t)$ qui converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ en tout point t.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge vers f en énergie.

3. On étudie f 2π périodique qui vaut t^2 sur $[0,2\pi[$.



(a) Avec Python

(b) $|f(t)| \leq (2\pi)^2$ donc $|f(t)|^2 \leq (2\pi)^4$ donc la fonction $|f|^2$ est bornée et comme on intégre sur un intervalle borné, son intégrale d'après ce qu'on a vu dans le cours sur les intégrales généralisées converge nécessairement.

(c) $c_0(f) = a_0(f) = \frac{4\pi^2}{3}$ et $c_n(f) = \frac{2}{n^2} + \frac{2i\pi}{n}$ en intégrant par partie deux fois.
$a_n(f) = \frac{4}{n^2}$ et $b_n(f) = -\frac{4\pi}{n}$.

(d) La fonction est ici constante par morceaux, elle est donc C^1 par morceaux. Elle a en tout point t une limite à droite et une limite à gauche notées $f(t^+)$ et $f(t^-)$, et sa dérivée existe partout sauf aux points de discontinuités du type $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, où elle admet une limite à droite et à gauche.

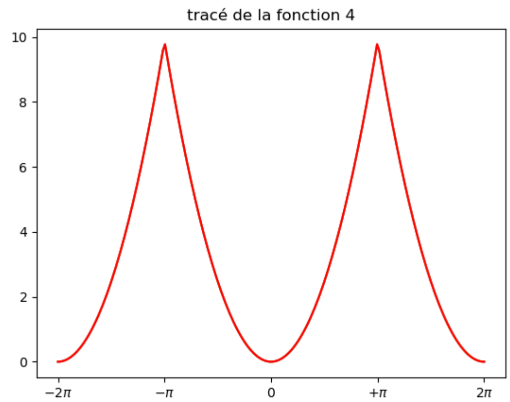
Donc le théorème de Dirichlet s'applique et on a convergence de $S_N(f)(t)$ vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$, ce qui donne

— pour tout $t \neq 2k\pi$ f est continue en t donc $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ et $S_N(f)(t)$ converge vers $f(t)$

— pour tout $t = 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ f est discontinue et $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{0+(2\pi)^2}{2} = \pi^2$ donc $S_N(f)(t)$ converge vers $\pi^2 \neq f(0) = f(2k\pi) = (2\pi)^2$.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge en énergie.

4. On étudie f 2π périodique qui vaut t^2 sur $[-\pi,\pi[$.



(a) Avec Python

(b) $|f(t)| \leq (\pi)^2$ donc $|f(t)|^2 \leq (\pi)^4$ donc la fonction $|f|^2$ est bornée et comme on intégre sur un intervalle borné, son intégrale d'après ce qu'on a vu dans le cours sur les intégrales généralisées converge nécessairement.

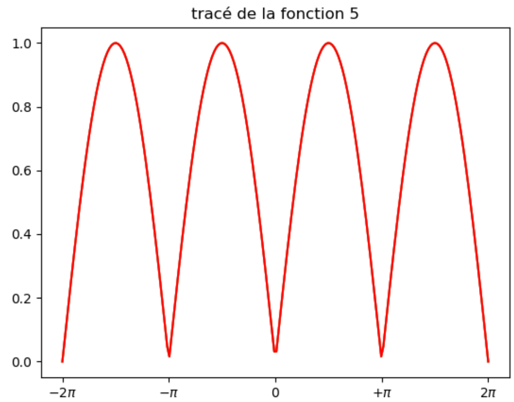
(c) $c_0(f) = a_0(f) = \frac{\pi^2}{3}$ et $c_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$.
$a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ et $b_n(f) = 0$.

(d) La fonction f est ici continue partout, donc elle admet bien sur une limite à droite et à gauche en tout point. De plus elle est dérivable sauf aux points du type $2k\pi + \pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et sa dérivée admet en ces points une limite à droite et à gauche.

Donc le théorème de Dirichlet s'applique et on a $S_N(f)(t)$ qui converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ en tout point t.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge vers f en énergie.

5. On étudie la fonction f qui est 2π périodique et vaut $|\sin(t)|$ sur $[-\pi,\pi[$.



(a) Avec Python par exemple !

(b) $|f(t)| \leq 1$ donc $|f(t)|^2 \leq 1$ donc la fonction $|f|^2$ est bornée et comme on intégre sur un intervalle borné, son intégrale d'après ce qu'on a vu dans le cours sur les intégrales généralisées converge nécessairement.

(c) $c_0(f) = a_0(f) = \frac{2}{\pi}$.
$c_1(f) = 0$ et $c_n(f) = -\frac{((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}$ pour $n > 1$.

$a_1(f) = 0$ et pour $n > 1$ $a_n(f) = -\frac{2((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}$ et $b_n(f) = 0$.

(d) La fonction f est ici continue partout, donc elle admet bien sur une limite à droite et à gauche en tout point. De plus elle est dérivable sauf aux points du type $2k\pi + \pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et sa dérivée admet en ces points une limite à droite et à gauche.

Donc le théorème de Dirichlet s'applique et on a $S_N(f)(t)$ qui converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ en tout point t.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge vers f en énergie.

Exercice 12.

On considère les deux fonctions suivantes 2π-périodiques (étudiées numériquement dans le TP 3.)

— $f_3(t) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\sin(t)|}}$ pour $t \in]-\pi,0[$ et $t \in]0,\pi[$ et $f_3(t) = 0$ pour $t = 0$, et $t = -\pi$.

— $f_4(t) = \dfrac{1}{|\sin(t)|}$ pour $t \in]-\pi,0[$ et $t \in]0,\pi[$ et $f_4(t) = 0$ pour $t = 0$, $t = -\pi$.

Sans aucun calcul de coefficients de Fourier indiquer si l'égalité de Parseval est vérifiée pour ces fonctions.

La série de Fourier de f_4 existe-t-elle ?

Correction :

— pour f_3 on doit vérifier pour répondre à cette question si $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{|\sin(t)|}}\right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{|\sin(t)|}}dt$ existe.

En effet on a des problèmes de convergence à étudier en 0, π et $-\pi$. Considérons dans un premier temps le cas où $t > 0$. Par parité de la fonction considérée on voit que le comportement sera le même sur $t < 0$, donc on peut étudier sans perte de généralité $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{|\sin(t)|}}dt$. Sur l'intervalle $[0,\pi]$ le sin est toujours positif et on peut donc enlever la valeur absolue

— Problème en 0 :

on a l'équivalent $\sin(t) \sim t$ pour t proche de 0 donc $\sqrt{\sin(t)} \sim \sqrt{t}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{\sin(t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}dt$ est une intégrale convergente, car c'est une intégrale de Riemann du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}}dt$ pour $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc elle converge.

Donc l'intégrale qu'on considère, du fait du critère par équivalent pour les intégrales de fonctions positives, est convergente en 0.

— Problème en π :

On remarque que $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ donc si on veut calculer $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}dt$ on peut le faire en effectuant le changement de variable $u = \pi - t$ et on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} u = \pi - t \\ du = -dt \\ \text{Quand } t = \frac{\pi}{2} \quad , \quad u = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \text{Quand } t = x \quad , \quad u = \pi - x \end{array}\right.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}dt &= \int_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi-u)}}du \\ &= \int_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(u)}}du\end{aligned}$$

On est donc ramené(e) à l'étude précédente quand $x \to \pi$ et on sait que cette intégrale converge.

On peut donc conclure que f_3 est de carré intégrable, ou autrement dit d'énergie finie. Donc l'égalité de Parseval d'après le cours est vérifiée.

— Pour f_4 il se trouve que sa série de Fourier n'existe pas, et donc il n'est pas question de parler de coefficients de Fourier ni d'égalité de Parseval.

En effet f n'a même pas $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ||f_4(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_4(t)dt$ qui existe. On a un problème de convergence en 0 et comme $\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t}$ pour t proche de 0, la convergence de l'intégrale que l'on regarde est la même que celle de l'intégrale de Riemann du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ pour $\alpha = 1$ donc elle diverge.

Donc les coefficients de Fourier de f_4 ne sont pas définis et la série de Fourier de f_4 n'existe pas. Donc evidemment l'égalité de Parseval n'est pas vérifiée.