Université Aix-Marseille | 2017-2018

Master Mathématiques et applications | 1ère année

Traitement du signal

TD1 : Calculs de transformées de Fourier.

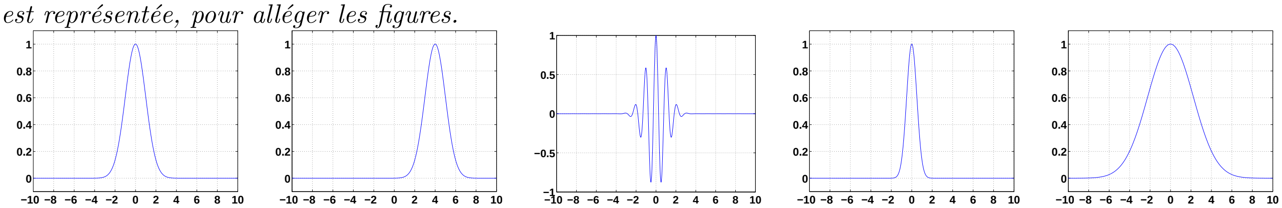
La notation $\mathbb{1}_A$ *indique que* $\mathbb{1}_A(x) = 1$ *si* $x \in A$ *et* 0 *sinon.*

Exercice 1 (*Calculs de transformées de Fourier*)

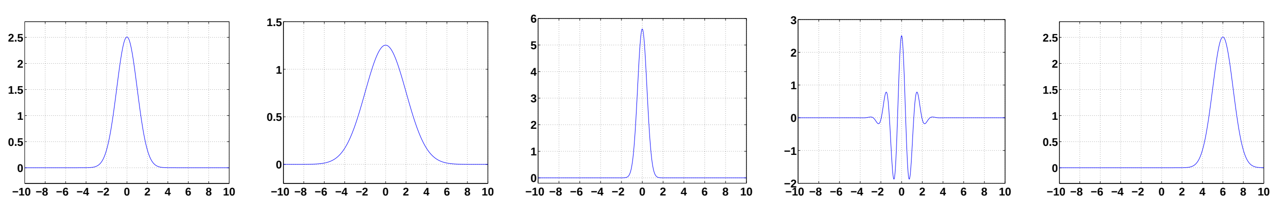
1. Soit $a > 0$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Vérifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Tracer rapidement ces fonctions, et calculer leurs transformées de Fourier. Tracer ces dernières (ou le cas échéant leur partie réelle).
   (a) $x \mapsto \frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$,
   (b) $x \mapsto \frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{[c-1,c+1]}(x)$,
   (c) $x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = e^{-2x}$ si $x \geq 0$ et 0 sinon.
   (d) $x \mapsto e^{-a|x|}$
   (e) $x \mapsto e^{-a|x|}\sin(bx)$
   (f) $x \mapsto xe^{-2|x|}$
   (g) $x \mapsto \frac{2a}{x^2+a^2}$
   (h) $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$
2. Quelles fonctions parmi les précédentes vérifient des propriétes de symétrie qui se répercutent sur la transformée de Fourier ?
3. Dans quels cas peut-on affirmer sans faire de calcul que $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$? $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)d\omega$?

Exercice 2 (*Quizz des transformées de Fourier*)

Les figures suivantes représentent six signaux temporels réels à temps continu s_0 à s_4. Les signaux s_1 à s_4 ont été obtenus par des transformations simples du signal s_0 : modulation (multiplication par un exponentielle complexe), décalage, dilatation, ajout d'une constante...
Sur la ligne suivante le signal $\widehat{s_0}$ représente la transformée de Fourier du signal $\widehat{s_0}$.
Les signaux $\widehat{s}_a$ à $\widehat{s}_d$ sont les transformées de Fourier dans le désordre des signaux s_1 à s_4 !
Remarque : certaines transformées de Fourier sont complexes, mais seule leur partie réelle est représentée, pour alléger les figures.



s_0 $\quad s_1$ $\quad s_2$ $\quad s_3$ $\quad s_4$



$\widehat{s_0}$ $\quad \widehat{s}_a$ $\quad \widehat{s}_b$ $\quad \widehat{s}_c$ $\quad \widehat{s}_d$

1. Identifier les transformations qui permettent de passer à chacun des signaux s_1 à s_4 à partir de s_0.
2. Reformer les couples $(s_i, \widehat{s}_j)$, c'est à dire associer à chaque signal s_i sa transformée

de Fourier élément de l'ensemble $\widehat{s}_a, \widehat{s}_b, \widehat{s}_c, \widehat{s}_d$.

Exercice 3

1. Tracer $Re(f(t)$ en fonction de t où $f : t \mapsto e^{-(a-ib)t^2}$ pour plusieurs valeurs de a et de b et justifier que f est bien dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. A l'aide d'une équation différentielle montrer que la transformée de Fourier de f : $t \mapsto e^{-(a-ib)t^2}$ vaut $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a-ib}} \exp\left(-\frac{(a+ib)\omega^2}{4(a^2+b^2)}\right)$.

Exercice 4

1. Justifier que $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$ est bien dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. A l'aide d'une équation différentielle calculer la transformée de Fourier de f.

Exercice 5 (*Sonar*)

Le but de cet exercice est l'étude de $e(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$ qui modélise une impulsion émise par un sonar.

1. A l'aide des résultats de l'exercice 1 calculer la transformée de Fourier de e (en ayant justifé au préalable que e est bien dans $L^1(\mathbb{R})$). Calculer $\| e \|_2^2$.
2. Le sonar reçoit un écho $r(t)$ provenant d'une cible. On suppose que $\hat{r}(\omega)$ est obtenu à partir de $\hat{e}(\omega)$ par un facteur d'atténuation $a(\omega) = e^{-i\theta\omega-\beta|\omega|}$ avec $(\theta, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, c'est à dire $\hat{r}(\omega) = a(\omega)\hat{e}(\omega)$.
   Calculer $r(t)$.

Exercice 6 (*Fonction porte*)

On considère la fonction f telle que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \quad \text{ou } t > 1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

1. Tracer la fonction f.
2. Calculer $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx < \infty$ et calculer $\hat{F}$. Montrer qu'elle s'écrit sous la forme $\hat{F}(\omega) = \frac{\sin^2(\alpha\omega)}{(\alpha\omega)^2}$ en précisant la valeur de α.
4. On pose maintenant $G(x) = F(x+1) - F(x-1)$. Tracer G et calculer sa transformée de Fourier en cherchant à faire le moins de calculs possible.
5. Soit K la primitive de G telle que $K(x) = \int_{-2}^{x} G(t)dt$. Calculer $\hat{K}$ sans calculer K.

Exercice 7 (*Dérivée des transformées de Fourier*)

On rappelle que la transformée de Fourier de la gaussienne $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est $\hat{g}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ (cf cours).

1. Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ en justifiant que h est bien dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. En déduire la transformée de Fourier de $k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x^2-1) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice 6 et les résultats du cours calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}$

Exercice 9 (*L'autre formule pour la transformée de Fourier*)

Dans cet exercice on change de définition de la transformée de Fourier et on utilise l'autre convention pour la transformée de Fourier $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t}dt$.

1. Calculer $\hat{f}$ (transformée de Fourier avec la formule du cours) en fonction de $\tilde{f}$.
2. Reprendre les questions de l'exercice 6 et donner les valeurs de $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{K}$ en faisant le moins de calculs possibles.
3. On suppose que f et $\tilde{f}$sont toutes les deux dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i2\pi\omega t}d\omega \tag{1}$$

4. On suppose que f est dans $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\| f \|^2 = \| \tilde{f} \|^2 \tag{2}$$

Exercice 10

Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt < \infty$ et la calculer en utilisant la transformée de Fourier.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.
Soit θ fixé dans $[0, 2\pi]$. Soit g_θ l'intégrale de f le long de la droite d'équation $-x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) = t$ (faire un dessin).

On a donc g_θ tel que

$$g_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(-t\sin\theta + \rho\cos\theta, t\cos\theta + \rho\sin\theta\right) d\rho$$

Montrer que $\hat{g}_\theta(\omega) = \hat{f}\left(-\omega\sin\theta, \omega\cos\theta\right)$. Comment peut-on retrouver f à partir de ses projections tomographiques g_θ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$?

Exercice 12

On note R l'opérateur qui à un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ associe sa valeur absolue :

$$Rf(t) = |f(t)| \ .$$

R est appelé rectificateur, et est utilisé en pratique pour retrouver l'enveloppe de signaux complexes (signaux modulés). Montrer que si $f(t) = a(t)\cos(\omega_0 t)$, où $a(t) \geq 0$, alors

$$\widehat{Rf}(\omega) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \hat{a}(\omega - 2n\omega_0) \ .$$

En supposant que $\hat{a}(\omega) = 0$ pour $|\omega| > \omega_0$, trouver une fonction h telle que $a = K_h Rf$, où K_h est l'opérateur de convolution par h.