Université Aix-Marseille 2017-2018
Master Mathématiques et applications 1ère année

Analyse fonctionnelle

TD2 : continuité, compacité, espaces complets.

Dans ce qui suit on aura besoin des définitions suivantes

Définition 1

Soient (X, d) et $(Y, \tilde{d})$ deux espaces métriques.

Une application $f : X \to Y$ est dite ouverte si l'image de tout ouvert de (X, d) par f est un ouvert de $(Y, \tilde{d})$, et fermée si l'image de tout fermé de (X, d) par f est un fermé de $(Y, \tilde{d})$.

Définition 2

Soit (X, d) un espace métrique.

La distance à une partie A de X est la fonction $d_A : x \mapsto d(x, A)$ définie sur X telle que

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$$

1 Version courte des exercices/Exercices courts

Exercice 1.1 (*EXERCICE A SUITE*)

Soit $X = C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|.\|_\infty$ telle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $A = \{f \in X : f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]\}$ est ouvert.
2. Montrer que $B = \{f \in X : \exists x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ est fermé.
3. Déterminer la frontière de $C = \{f \in C([0, 1]) : f(0) > 0\}$.

Exercice 1.2

Déterminer dans $\mathbb{R}^2$ l'adhérence du graphe

$$G = \{(x, y) : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x \leq 1\}$$

Exercice 1.3

Dans cet exercice on a besoin de la définition 1.

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques.

1. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $A \subset X$ on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Que peut-on dire de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?
2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ et que f est ouverte si et seulement si $f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$.

Exercice 1.4 (*EXERCICE A SUITE*)

Soient (X, d) et $(Y, \tilde{d})$ deux espaces métriques.
Soient f et g deux applications continues de X dans Y.

1. Montrer que $G = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.
2. Soit A une partie de X dense dans X (c'est à dire telle que $\overline{A} = X$). Montrer que si l'on a $f(a) = g(a)$ pour tout a dans A alors pour tout $x \in X$ $f(x) = g(x)$.
3. Montrer que si f est une application continue de X dans Y alors $G_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

Exercice 1.5

Construire un recouvrement ouvert de $]0, 1[$ à partir duquel on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini. Retrouver le fait que $]0, 1[$ n'est pas compact.

Exercice 1.6

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de X de limite ℓ.

Montrer que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un compact de X.

Exercice 1.7

On prend $X = \mathbb{R}$ et on pose pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

1. Montrer que d est une distance sur X.
2. Montrer que X est borné pour la distance d.
3. Montrer que (X, d) n'est pas compact alors qu'il est fermé et borné pour d.

Exercice 1.8 (*Théorème de Dini*)

L'objectif de cet exercice est de montrer le théorème suivant

Théorème 1

Soit (K, d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite croissante de fonctions continues à valeurs réelles qui converge simplement en tout point de K vers une fonction continue f.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K.

Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions réelles continues sur K telles que $(g_n)_n$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur K. Soit $x_n \in K$ tel que $g_n(x_n) = \max_{x\in K} g_n(x)$.

1. Montrer que $g_n(x_n)$ est décroissante.
2. Montrer que $g_n(x_n) \to 0$.
3. Conclure et démontrer le théorème 1.

Exercice 1.9 (*EXERCICE A SUITE*)

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

1. Montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des points tels que $d(x, A) = 0$.
2. Montrer que $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne de rapport 1.
3. Soient $A \subset X$ et $B \subset X$. Montrer que l'ensemble $\{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
4. Soit K un compact de X et F un fermé disjoint de K. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$d(x, y) \geq \alpha, \forall x \in K, \forall y \in F.$$

Exercice 1.10 (*EXERCICE A SUITE*)

Soient $K, F \subset E$ deux compacts non vides de E. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a - b\| = \mathrm{dist}(K, F) = \inf_{x\in K, y\in F} \| x - y \|$.

Exercice 1.11

Soit $X = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

1. Soit c_0 l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans X.
2. Soit c_{00} l'ensemble des suites dont le terme est nul à partir d'un certain rang. Déterminer l'adhérence de c_{00}.

2 Version longue des exercices/Exercices longs

Exercice 2.1

Cet exercice est la version un peu plus longue de 1.1.

Soit $X = C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|.\|_\infty$ telle que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $A = \{f \in X : f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]\}$ est ouvert.

2. Montrer que $B = \{f \in X : \exists x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ est fermé.
3. Déterminer la frontière de $C = \{f \in C([0,1]) : f(0) > 0\}$.
4. Montrer que $A \subset X$ n'est pas ouvert pour la norme définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.
5. Vérifier que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$ est 1-lipschitzienne pour $\|.\|_1$ mais aussi pour $\|f\|_\infty$.

Exercice 2.2

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.4.

Soient (X,d) et $(Y,\tilde{d})$ deux espaces métriques.
Soient f et g deux applications continues de X dans Y.

1. Montrer que $G = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.
2. Soit A une partie de X dense dans X (c'est à dire telle que $\overline{A} = X$). Montrer que si l'on a $f(a) = g(a)$ pour tout a dans A alors pour tout $x \in X$ $f(x) = g(x)$.
3. Application : soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
pour tout x, y dans $\mathbb{R}$.

   Montrer que $f(r) = rf(1)$ pour tout rationnel r et en déduire l'expression de f.
4. Montrer que si f est une application continue de X dans Y alors $G_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.
5. La réciproque est-elle vraie ?
6. On suppose dans cette question que $(Y,\tilde{d})$ est un espace métrique compact et on considère $f : X \mapsto Y$ une application dont le graphe $G_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$. Montrer que f est continue.
7. On suppose maintenant que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée et telle que G_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.

Exercice 2.3

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.9.

Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$.

1. Montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des points tels que $d(x,A) = 0$.
2. Montrer que $d_A : x \mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne de rapport 1.
3. Soient $A \subset X$ et $B \subset X$. Montrer que l'ensemble $\{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\}$ est ouvert.
4. Soit K un compact de X et F un fermé disjoint de K. Montrer qu'il

existe $\alpha > 0$ tel que pour

$$d(x,y) \geq \alpha, \forall x \in K, \forall y \in F.$$

5. Soit K un compact de X et U un ouvert qui contient K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait l'implication

$$d(x,K) < r \Rightarrow x \in U$$

Exercice 2.4

Cet exercice est la suite de l'exercice 1.10.

1. On se place dans $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé quelconque sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   Soient $K, F \subset E$ deux compacts non vides de E. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a-b\| = \operatorname{dist}(K,F) = \inf_{x \in K, y \in F} \| x - y \|$.
2. On prend dans cette question $E = \mathbb{R}^n$. Soient $K, F \subset E$ des parties non vides, avec K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a-b\| = \operatorname{dist}(K,F) = \inf_{x \in K, y \in F} \| x - y \|$.
3. Débat du jour : le résultat de la question précédente est-il encore vrai si on prend K compact et F fermé dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ quelconque ?