TD 2 : Intégrales généralisées convergentes ou divergentes

Notations et définitions

— $\mathbf{1}_A$ indique que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon avec A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$. On note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe si $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe et on a $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Exercice 1.

Dans un certain nombre de situations on veut pouvoir dire si une intégrale converge, sans la calculer explicitement. Dans cet exercice on verra que dire si l'intégrale converge est beaucoup plus facile que la calculer explicitement.

1. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ en utilisant le changement de variables $u = \sqrt{t^2+1}$.
2. Montrer sans utiliser le calcul précédent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ converge.
3. Donner la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$.

Exercice 2.

1. Soit F la fonction définie pour $x \geq 1$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$.

   Calculer $F(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 3.

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer où est le problème de convergence de l'intégrale, et montrer sans calculer explicitement sa valeur qu'elle converge absolument.

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(t)}{\sqrt{|t|}}dt \qquad I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^4}dt \qquad I_3 = \int_3^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2+3t+8}dt \qquad I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2\ln(t)}dt$$

Exercice 4.

Indiquer en utilisant le critère par équivalent si les intégrales suivantes sont convergentes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt \qquad I_2 = \int_2^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 dt}{(t^2+1)\sqrt{t}}$$

Exercice 5.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ converge.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par partie l'égalité suivante
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$

On peut montrer que la valeur commune à ces trois intégrales est $\frac{\pi}{2}$, et d'autre part que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ ne converge pas !

Exercice 6.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles absolument convergentes ?

$$I_1 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t} dt \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{1/4}} dt$$

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^3)}{t^3} dt \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^3)}{t^3} dt \qquad I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|t|} dt$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \qquad I_9 = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-4t} dt$$

$$I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2t}-1} dt \qquad I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \qquad I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^3} dt$$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{2 + \frac{1}{\sqrt{t}}}{t^2}$.

1. On pose pour tout entier $n \geq 1$ $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t) dt$.
2. Montrer que I_n est absolument convergente.
3. Calculer pour $x \geq 1$ $F_n(x) = \displaystyle\int_n^x f(t) dt$ en fonction de x et de n. En déduire la valeur de I_n pour n fixé.
4. Donner un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.