Université Aix-Marseille 2017-2018
Master Mathématiques et applications 1ère année

Analyse fonctionnelle

TD5 : définition des espaces de Hilbert, projection, bases hilbertiennes.

1 Exercices de course rapide : le 100 m

Exercice 1.1

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{n^2} u_n^2 < +\infty$$

1. Démontrer que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel réel.
2. Démontrer que $u \mapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{n^2} u_n^2\right)^{1/2}$ est une norme sur $\mathbb{H}$ que l'on notera $\|.\|_{\mathbb{H}}$.
3. Démontrer que $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert.

Exercice 1.2

Soit $\mathbb{H} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application $\phi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ par

$$\phi(A, B) = Tr(B^* A)$$

où B^* désigne l'adjointe de B c'est à dire si $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ on a $B^*_{ij} = \overline{b_{ji}}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire
2. Montrer que la norme associée à ϕ vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
3. Montrer que $(\mathbb{H}, \phi)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 1.3

Considérons $\mathbb{E} = C([0, 1])$ muni de la norme

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)|dt$$

et $F = \{f \in \mathbb{E} : f(0) = 0\}$. On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.

1. Vérifier que F est une partie convexe fermée de $\mathbb{E}$.
2. Calculer $dist(\mathbf{1}, F)$. Est ce que $\mathbf{1}$ possède une projection sur F ?

Exercice 1.4

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert.

1. Soit $A = \mathbb{B}_f(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{H}$. Justifier l'existence de $P_A(x)$ la projection orthogonale d'un élément x de $\mathbb{H}$ sur A et la calculer.
2. Soit $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{H}$. On considère A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ engendré par cette famille.
   (a) Justifier l'existence de $P_A(x)$ la projection orthogonale d'un élément x de $\mathbb{H}$ sur A.
   (b) Calculer $P_A(x)$ dans le cas où les $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ sont un système orthonormé.
   (c) Calculer $P_A(x)$ dans le cas général.
   (d) Application : calculer $m = \inf\limits_{a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$.

Exercice 1.5

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et S une partie de $\mathbb{H}$. On note $S^\perp$ l'orthogonal de S c'est à dire $S^\perp = \{y \in H : \forall x \in S \ \langle x, y\rangle = 0\}$.

1. Montrer que $S^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$.
2. Montrer que $(\overline{S})^\perp = S^\perp$.
3. Montrer que si S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$, alors $(S^\perp)^\perp = \overline{S}$.

Exercice 1.6

Soit $\mathbb{H} = C([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. On définit le sous-espace vectoriel de E

$$F = \{f \in E : f(0) = 0\}$$

Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

$\mathbb{H}$ muni de $\langle ., .\rangle$ est-il un espace de Hilbert ?

Exercice 1.7 (*EXERCICE A SUITE*)

Soit $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telles que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 < \infty$

1. Montrer que la famille des $\{\delta^n, n \in \mathbb{Z}\}$ telle que à n fixé toutes les coordonnées de δ^n sont nulles sauf la n-ième qui vaut 1 est une base hilbertienne de $\mathbb{H}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $M = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in H : \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = 0\}$.

   Vérifier que M est un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$. Chercher N tel que $M \oplus N = \mathbb{H}$. Soit l'élément x de $\mathbb{H}$ tel que $x_0 = 1$ et $x_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^\star$. Donner la valeur de sa distance à M.

Exercice 1.8 (*EXERCICE A SUITE-EXAMEN Juin 2017*)

Considérons l'espace de Banach $\mathbb{E} := (C[-\pi,\pi], \| \|_\infty)$ et l'espace de Hilbert $\mathbb{H} := (L^2[-\pi,\pi], \langle , \rangle)$ où

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)| \quad f \in \mathbb{F},$$
$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi}, \quad f, g \in \mathbb{H}$$
$$\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in \mathbb{H}.$$

On admet que le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $e_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{H}$.

1. Établir que $e_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{H}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $f \mapsto \hat{f}$ donnée par

$$\hat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi}$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{E}$) et calculer sa norme sur chacun de ces deux espaces.

Exercice 1.9

Soit $w : x \mapsto x^{-\ln(x)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère l'espace de Hilbert $L_w^2 = \{f : f\sqrt{w} \in L^2(]0, +\infty[)\}$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)w(x)dx$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et q_n la fonction polynômiale telle que $q_n(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Vérifier que $\mathcal{P} \subset L_w^2$.
2. Soit $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. Montrer que $\langle q_n, f\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\mathcal{P}$ n'est pas dense dans L_w^2.

2 Exercices d'endurance : le 1000 mètres.

Exercice 2.1

Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{R}_N[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus N.
2. Montrer que $\mathbb{R}_N[X]$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.
3. On va montrer dans cette question que $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire n'est pas un espace de Hilbert.
   (a) Soit $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Montrer que (P_n) converge uniformément vers l'application exponentielle notée h sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire que P_n converge vers h pour la norme associée à $\langle ., .\rangle$.

(c) Conclure.

Exercice 2.2

Cet exercice est la version longue de 1.7.
Soit $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 < \infty$

1. Montrer que la famille des $\{\delta^n, n \in \mathbb{Z}\}$ telle que à n fixé toutes les coordonnées de δ^n sont nulles sauf la n-ième qui vaut 1 est une base hilbertienne de H.
2. Pour $l \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $M = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in H : \sum_{k=0}^{l} x_k = 0\}$.

   Vérifier que M est un sous-espace fermé de H. Chercher N tel que $M \oplus N = \mathbb{H}$. Soit l'élément x de $\mathbb{H}$ tel que $x_0 = 1$ et $x_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^\star$. Donner la valeur de sa distance à M.
3. Soit $A = \{u \in \mathbb{H} : u_{2k} \geq 0\}$. Montrer l'existence de la projection d'un élement x de $\mathbb{H}$ sur A et calculer-la.
4. Soit $B = \{u^n \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}^* : u^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\delta^n\}$. Montrer que 0 n'a pas de projection sur B et vérifier que B est bien fermé.

Exercice 2.3

Soit $\mathbb{H} = L^2([0,1])$ et $\psi = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0,..,2^j - 1$, on considère l'intervalle dyadique $\Delta_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$. On pose $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.

On pose ensuite $e_n = \psi_{j,k}$ avec $n = 2^j + k$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0,..,2^j - 1$, et $e_0 = \mathbb{1}_{[0,1]}$.

1. Montrer que le système $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonal dans $\mathbb{H}$.
2. Montrer que $Vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions en escalier, constantes sur les intervalles dyadiques $\Delta_{j,k}$.
3. Montrer que $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.

On appelle le système des $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ ainsi défini la base de Haar. C'est le modèle le plus simple de ce qu'on appelle les bases d'ondelettes et qui est très utilisé à la fois en mathématiques et dans ses applications (comme par exemple en traitement du signal).

Exercice 2.4 (*EXAMEN juin 2017*)

Considérons l'espace de Hilbert $\mathbb{H} := (L^2[-\pi,\pi], \langle,\rangle)$ où

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi}, \quad f, g \in \mathbb{H}$$

de norme associée

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in \mathbb{H}.$$

On munit $\mathbb{H}$ de la base hilbertienne $e_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{H}_1$ le sous-espace de $\mathbb{H}$ engendré par $(e_n)_{n\geq 0}$ et $\mathbb{H}_2$ le sous-espace de $\mathbb{H}$ engendré par

$(e_{-n} + ne_n)_{n\geq 0}$

1. Montrer qu'une fonction $f \in \mathbb{H}$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathbb{H}_1}$ si et seulement si il existe une $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$$
2. Montrer qu'une fonction $f \in \mathbb{H}$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathbb{H}_2}$ si et seulement si il existe une $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+n^2)|b_n|^2 < +\infty$
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,(e_{-n} + ne_n)$$
3. Établir que $\overline{\mathbb{H}_1} + \overline{\mathbb{H}_2}$ est dense dans $\mathbb{H}$.
4. Établir que $\overline{\mathbb{H}_1} + \overline{\mathbb{H}_2}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{H}$.
5. Soit $P_1 := P_{\overline{\mathbb{H}_1}}$ la projection orthogonale de $\mathbb{H}$ sur $\overline{\mathbb{H}_1}$. On note g l'élément de $\mathbb{H}$ donné par $g(t) := \cos t + \cos(2t)$. Calculer $P_1(g)$ puis en déduire la distance $d(g, \overline{\mathbb{H}_1})$ de la fonction g à $\overline{\mathbb{H}_1}$.

3 Exercices « Course dans les calanques »

Exercice 3.1 (*EXAMEN Juin 2017*)

Cet exercice est la version longue de 1.8.

Considérons le espace de Banach $\mathbb{E} := (C[-\pi,\pi], \| \ \|_\infty)$ et l'espace de Hilbert $\mathbb{H} := (L^2[-\pi,\pi], \langle , \rangle)$ où

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)| \quad f \in \mathbb{F},$$

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi}, \quad f, g \in \mathbb{H}$$

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in \mathbb{H}.$$

On admet que le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $e_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{H}$.

1. Établir que $e_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{H}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $f \mapsto \hat{f}$ donnée par
$$\hat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi}$$
définit une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{E}$) et calculer sa norme sur chacun de ces deux espaces.
3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'application $L_N f \mapsto S_N f(0)$ donnée par
$$L_N(f) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{E}$).

4. Établir que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $f \in \mathbb{H}$ on a

$$L_N(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(-t) \frac{dt}{2\pi}$$

où $D_N(0) = N + \frac{1}{2}$ et pour $t \neq 0$,

$$D_N(t) := \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)}.$$

5. Calculer la norme de la forme linéaire continue L_N sur $\mathbb{H}$.
6. Prouver que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la norme de la forme linéaire continue L_N sur $\mathbb{E}$ est donnée par

$$\|L_N\|_{\mathbb{E}'} = \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| \frac{dt}{2\pi}.$$

7. Établir que pour $\lim_{N \to +\infty} \|L_N\|_{\mathbb{E}'} = +\infty$.
8. En déduire qu'il existe une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ telle que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)$ diverge.