Université Aix-Marseille 2017-2018
Master Mathématiques et applications 1ère année

Analyse fonctionnelle

TD6 : convergence faible, opérateurs auto-adjoints

Dans ce qui suit on aura besoin de la définition suivante

Définition 1

Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. On note $\|.\|$ la norme, issue du produit scalaire $\langle .,.\rangle$ sur H, pour laquelle il est complet.

- *On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x dans H, et on note $x_n \to x$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans H pour $\|.\|$, c'est à dire $\|x_n - x\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.*
- *On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans H et on note $x_n \rightharpoonup x$ si pour tout y dans H la suite $\langle x_n, y\rangle$ converge vers $\langle x, y\rangle$.*

Remarque : la convergence faible peut être définie sur un espace normé quelconque $\mathbb{E}$.

1 Exercices

Exercice 1.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H et $f \in H$ où H est un espace de Hilbert. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. $f_n \to f$.
2. $f_n \rightharpoonup f$ et $\|f_n\| \to \|f\|$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle$ uniformément pour tout g dans H avec $\|g\| = 1$, autrement dit pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $g \in H$ tel que $\|g\| = 1$ on a $|\langle f_n, g\rangle - \langle f, g\rangle| < \varepsilon$.

Exercice 1.2

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. L'objectif de l'exercice est de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

1. Montrer par récurrence qu'il existe une suite d'applications strictement croissantes $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les suites pour $0 \leq m \leq k$ fixés

$$\left(\langle x_{\varphi_0\circ\varphi_1..\circ\varphi_k(n)}, e_m\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

soient convergentes.

2. Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\Phi(n) = \varphi_0 \circ \varphi_1 .. \circ \varphi_n(n)$. Vérifier que Φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $x_{\Phi(n)}$ est faiblement convergente.
4. Supposons à présent que H est un espace de Hilbert non séparable. En considérant F le sous-espace fermé contenant les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

Exercice 1.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $u_n \rightharpoonup 0$

1. Montrer que l'on peut extraire de (u_n) une suite (v_n) telle que

$$|\langle v_1, v_k\rangle| \leq \frac{1}{k}, \ldots, |\langle v_{k-1}, v_k\rangle| \leq \frac{1}{k}$$

   pour tous $k = 2, 3 \ldots$
2. En exprimant $\|v_1 + \cdots + v_n\|^2$ à l'aide des produits scalaires $\langle v_j, v_k\rangle$ montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|v_1 + \ldots v_n\| \leq C\sqrt{n}$.
3. En déduire le résultat suivant : si $u_n \rightharpoonup u$ alors on peut extraire de (u_n) une suite (v_n) telle que $\frac{1}{n}(v_1 + \ldots v_n) \to u$.
4. Montrer que si H est un espace de Hilbert et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de H qui converge faiblement vers x alors il existe une suite (y_n) formée par des combinaisons linéaires convexes de (x_n) qui converge fortement vers x.

Exercice 1.4

1. Soient H et G deux espaces de Hilbert et $u \in L(H, G)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
   (a) u est inversible à gauche.
   (b) $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in H$ $\|u(x)\| \geq c\|x\|$
   (c) $Im(u)$ est fermée dans G et $u : H \to Im(u)$ est inversible.
2. En déduire que si H est un espace de Hilbert et si $u \in L(H)$ est telle qu'il existe $c > 0$ telle que $|\langle u(x), x\rangle| \geq c\|x\|^2$ pour tout $x \in H$ alors u est inversible.

2 Problème

On considère $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable dont on note $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique et $\| \, . \, \|$ la norme induite par ce produit scalaire.
Par abus de notation on note également $\| \, . \, \|$ la norme d'opérateur associée, c'est à dire telle que si $R : x \mapsto Rx$, on a $\| R \| = \sup_{x\in\mathcal{H}:\|x\|=1} \| Rx \|$.

On travaille ici avec la définition d'un repère

Définition 2

Une famille de fonctions $(\phi_j)_{j\in J}$ dénombrable de $\mathcal{H}$ est un repère si il existe deux constantes $A > 0$ et $B < \infty$ telles que

$$A \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 \leq B. \parallel f \parallel^2 \tag{1}$$

On appelle A et B les bornes du repère.

Si $A = B$ on dit que le repère est strict.

2.1 Exemples de repères

1. Montrer qu'une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ $\{\psi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un repère et calculer ses bornes.
2. Mêmes questions dans le cas où on considère la réunion de deux bases hilbertiennes.
3. Soit $K \in \mathbb{Z}/\{0\}$. Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{C}^N$ $\{\phi^p, 0 \leq p < KN\}$ avec pour tout $n = 0, ..., N-1$ $\phi_n^p = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{i2\pi pn}{KN}}$.

   Montrer que les $\{\phi^p, 0 \leq p < KN\}$ forment un repère strict de $\mathbb{C}^N$ dont on calculera la borne.
4. Soit $K \geq 1$ montrer que $\{\phi_p(t) = e^{\frac{i2\pi pt}{K}}, p \in \mathbb{Z}\}$ est un repère strict de $L^2([0,1])$. Calculer sa borne.

2.2 Propriétés de l'opérateur de repère

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(\phi_j)_{j\in J}$ un repère de $\mathcal{H}$ de bornes $A > 0$ et $B > 0$.

1. On considère S un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{H}$ qui vérifie il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}$

   $$|\langle S(f), f\rangle| \geq \alpha \parallel f \parallel^2 \tag{2}$$

   Montrer que S est un opérateur bijectif et que son inverse S^{-1} vérifie

   $$\parallel S^{-1}(f) \parallel \leq \alpha^{-1} \parallel f \parallel \tag{3}$$

2. On considère l'opérateur U tel que

   $$\begin{array}{rccc} U: & \mathcal{H} & \to & l^2(J) \\ & f & \mapsto & (\langle f, \phi_j\rangle)_{j\in J} \end{array}$$
3. Calculer $U^\star$.
4. Soit $\mathcal{R} = U^\star U$ appelé opérateur de repère.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}^\star = \mathcal{R}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{R}$ est inversible.

(d) On pose $\tilde{\phi}_j = \mathcal{R}^{-1}(\phi_j)$ pour $j \in J$. Montrer que $\{\tilde{\phi}_j, j \in J\}$ est un repère dont les bornes sont B^{-1} et A^{-1}.

$\{\tilde{\phi}_j, j \in J\}$ *est appelé repère dual de* $\{\phi_j, j \in J\}$

Indications : On pourra chercher à montrer et utiliser les propositions suivantes

Proposition 1

Soit A un opérateur linéaire tel que

- $A^\star = A$
- $\langle A(f), f\rangle \geq 0$ *pour tout* $f \in \mathcal{H}$
- $\langle A(f), f\rangle = 0$ *si et seulement si* $f = 0$.

Alors l'application $\langle .,. \rangle_A : (f, g) \mapsto \langle A(f), g\rangle$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{H}$.

Proposition 2

Soit A un opérateur linéaire tel que

- $A^\star = A$
- $\langle A(f), f\rangle \geq 0$ *pour tout* $f \in \mathcal{H}$
- $\langle A(f), f\rangle = 0$ *si et seulement si* $f = 0$.

On rappelle la notation $\| A \| = \sup\limits_{f \in H, x \neq 0} \frac{\|A(f)\|}{\|f\|}$ *la norme d'opérateur de* A.

Alors pour tout $f \in \mathcal{H}$

$$\| A(f) \|^2 \leq \| A \| \, \langle A(f), f\rangle \tag{4}$$

(e) Montrer que dans le cas où $\{\phi_j, j \in J\}$ est un repère strict alors pour $j \in J$ $\tilde{\phi}_j$ est proportionnelle à ϕ_j.

(f) Montrer que tout $f \in \mathcal{H}$ s'écrit $f = \sum\limits_{j \in J} \langle f, \phi_j\rangle \tilde{\phi}_j$