TD 6 : Théorèmes de Fubini-Tonelli

Exercice 1.

1. Montrer que l'ensemble
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |y| \leq |\sin(x)|,\ ,0 \leq x \leq \pi\}$$
est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

   Calculer $\lambda_2(A)$.
2. Montrer que l'ensemble
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 1, 0 \leq x\sqrt{y^2+z^2} \leq 1\}$$
est un borélien de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\lambda_3(B)$.

Exercice 2.

On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ converge (par intégration par partie elle est égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x}dx$. On se propose de la calculer.

1. En appliquant le théorème de Fubini montrer que pour tout $t > 0$
$$\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_{[0,+\infty[\times[0,t]} e^{-ux}\sin(x)d\lambda_2(u,x)$$
2. Vérifier que
$$\int_0^t e^{-ux}\sin(x)dx = \frac{1-e^{-ut}(u\sin(t)+\cos(t))}{1+u^2}$$
3. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n soit nulle en dehors de $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$.

1. Montrer l'existence d'une telle suite de fonctions f_n.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose
$$f(x,y) = \sum_{n\geq 1}(f_n(x) - f_{n+1}(x))f_n(y)$$
Montrer que f est borélienne.

3. Démontrer que

$$\int \left(\int f(x,y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \neq \int \left(\int f(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

En déduire que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

4. Vérifier directement que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\lambda_2 = +\infty$$