Aix-Marseille Université
Année Universitaire 2017-2018

Séries et applications
L2 SPI

Test sur le devoir à la maison.

Exercice 1.

On considère ici $I_2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Parmi les trois démonstrations suivantes de la convergence de I_2 deux ne sont pas correctes et comportent une erreur.

Indiquez

— quelles sont les deux démonstrations qui ne sont pas correctes ;
— où est l'erreur dans chacune d'elle, en expliquant pourquoi c'est une erreur.

Répondre sur la page suivante.

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$ donc I_2 est convergente.

2. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

   On a pour tout $x \geq 1$ $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

   Or $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.
   Donc par le théorème 1 de comparaison des intégrales généralisées on a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ qui converge.

3. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

   On a pour tout $x > 0$ $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

   Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$.
   Donc par le théorème 1 de comparaison des intégrales généralisées on a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ qui converge.

Aix-Marseille Université
Année Universitaire 2017-2018

Séries et applications
L2 SPI

Réponses au test sur le devoir à la maison.

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

Exercice 2.

On pourra utiliser que $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = \frac{1}{2}\left((\sqrt{2}x-1)^2+1\right)$

Complétez les pointillés dans ce qui suit pour que les équations soient correctes

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \sqrt{2}\int_{-10}^{10} \frac{\cdots\cdots\cdots}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}dx \\
&= \sqrt{2}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots\right)\right]_{-10}^{10} \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(10\sqrt{2}-1\right) - \sqrt{2}\arctan\left(-10\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots\right)
\end{aligned}
$$

Réponses à l'exercice 1.