

# Dynamique symbolique sur les groupes de Baumslag-Solitar

Nathalie Aubrun

(CNRS, Univ. Paris-Saclay, LISN)

Séminaire Teich – I2M

Vendredi 23 avril 2021



université  
PARIS-SACLAY

*Inria*



LABORATOIRE  
INTERDISCIPLINAIRE  
DES SCIENCES DU  
NUMÉRIQUE

# Plan de l'exposé

- 1 Dynamique symbolique sur des groupes
- 2 Les groupes de Baumslag-Solitar
- 3 Problème du Domino et apériodicité
- 4 Graphes d'orbites de substitutions
- 5 Superposition de graphes d'orbites
- 6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

# Plan de l'exposé

- 1 Dynamique symbolique sur des groupes
- 2 Les groupes de Baumslag-Solitar
- 3 Problème du Domino et apériodicité
- 4 Graphes d'orbites de substitutions
- 5 Superposition de graphes d'orbites
- 6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

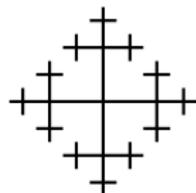
## Espace des configurations

- $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).

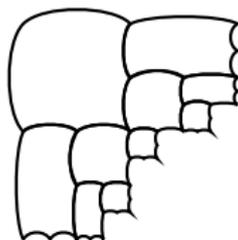
## Espace des configurations

- $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).

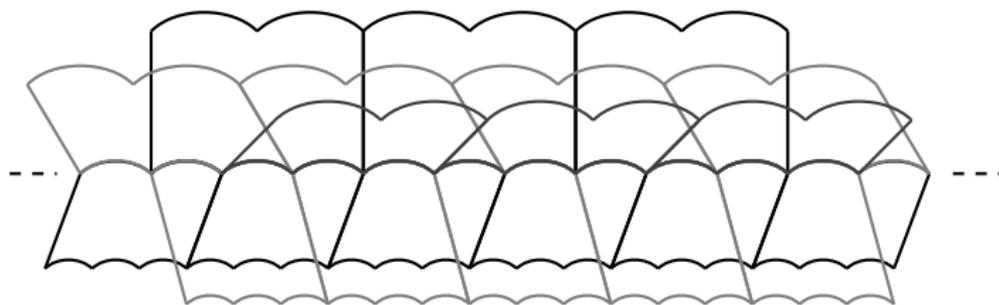
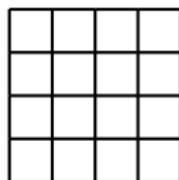
$\langle a, b | \emptyset \rangle$



$\langle a, b | ab^2 = ba^2 \rangle$



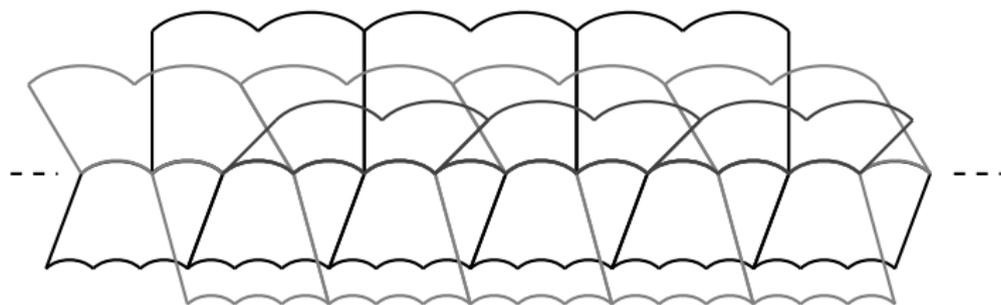
$\langle a, b | ab = ba \rangle$



$\langle a, b | a^2b = ba^3 \rangle$

## Espace des configurations

- $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).
- $A^G$  : espace des **configurations**, **compact**.

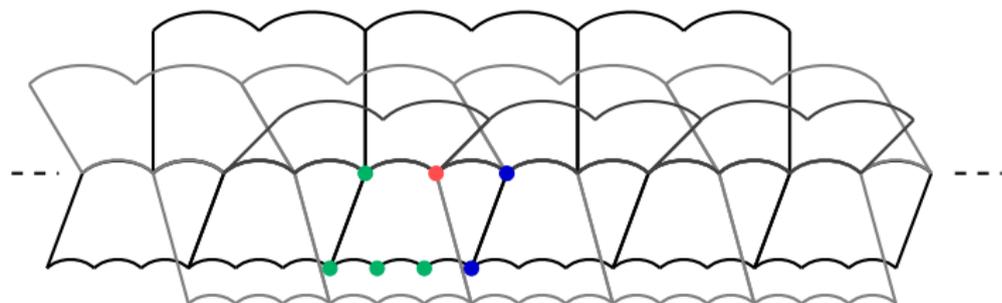


## Espace des configurations

- $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).
- $A^G$  : espace des **configurations**, **compact**.
- action de  $G$  sur  $A^G$  par **translation** :

$$\mathfrak{S} : \begin{pmatrix} G \times A^G & \rightarrow & A^G \\ (g, x) & \mapsto & \mathfrak{S}_g(x) \end{pmatrix}$$

avec  $(\mathfrak{S}_g(x))_h = x_{g^{-1} \cdot h}$  pour tout  $h \in G$

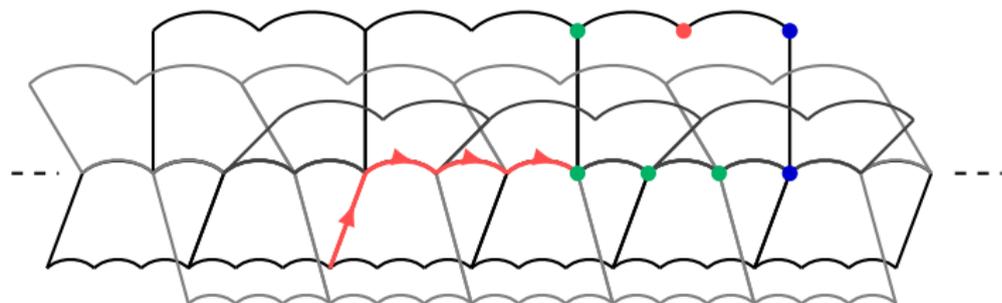


## Espace des configurations

- $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).
- $A^G$  : espace des **configurations**, **compact**.
- action de  $G$  sur  $A^G$  par **translation** :

$$\mathfrak{S} : \begin{pmatrix} G \times A^G & \rightarrow & A^G \\ (g, x) & \mapsto & \mathfrak{S}_g(x) \end{pmatrix}$$

avec  $(\mathfrak{S}_g(x))_h = x_{g^{-1} \cdot h}$  pour tout  $h \in G$



- $(A^{\mathbb{G}}, \mathfrak{S})$  est un système dynamique, le **full-shift**

- $(A^G, \mathcal{G})$  est un système dynamique, le **full-shift**
- un **sous-décalage** est un sous-système de  $(A^G, \mathcal{G})$  :

$$(X \subset A^G, \mathcal{G})$$

où l'ensemble de configuration  $X$  est fermé et stable par  $\mathcal{G}$ .

- $(A^G, \mathfrak{S})$  est un système dynamique, le **full-shift**
- un **sous-décalage** est un sous-système de  $(A^G, \mathfrak{S})$  :

$$(X \subset A^G, \mathfrak{S})$$

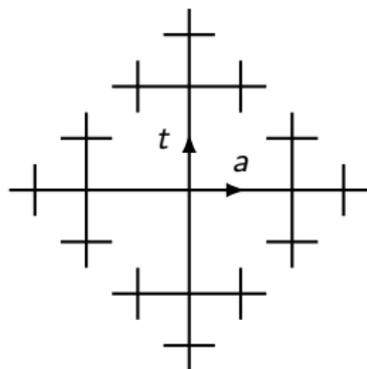
où l'ensemble de configuration  $X$  est fermé et stable par  $\mathfrak{S}$ .

- $X$  est un sous-décalage s'il existe un ensemble de motifs interdits  $F$  tel que

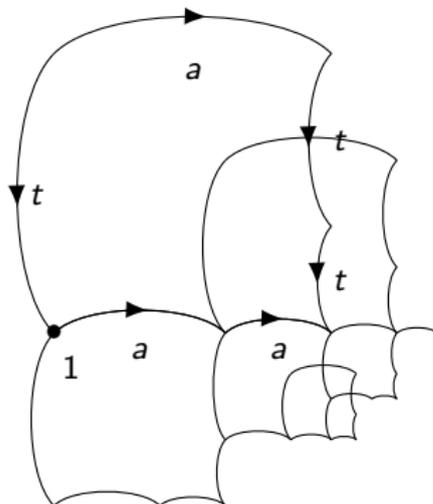
$$X = \left\{ x \in A^G, \mid \text{aucun motif de } F \text{ n'apparaît dans } x \right\}.$$

## Sous-décalages de type fini (SFT)

Sous-décalage **de type fini** (SFT) = on peut choisir  $|F| < \infty$



$$\langle a, t \mid \emptyset \rangle$$



$$\langle a, t \mid at^2 = ta^2 \rangle$$

SFT  $\approx$  ensemble de pavages par des **tuiles de Wang**



# Plan de l'exposé

1 Dynamique symbolique sur des groupes

**2 Les groupes de Baumslag-Solitar**

3 Problème du Domino et apériodicité

4 Graphes d'orbites de substitutions

5 Superposition de graphes d'orbites

6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

# Groupes de Baumslag-Solitar

Groupes à deux générateurs et une relation :

$$BS(m, n) := \langle a, t \mid t^{-1} a^m t = a^n \rangle$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

# Groupes de Baumslag-Solitar

Groupes à deux générateurs et une relation :

$$BS(m, n) := \langle a, t \mid t^{-1} a^m t = a^n \rangle$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

- en 1951 Higman construit un groupe  $G$  de présentation finie, isomorphe à l'un de ses sous-groupes quotient  $G/H$  non triviaux.

$$H = \langle a, t \mid at = ta^2 \rangle = BS(1, 2)$$

Higman pense qu'un tel  $G$  a nécessairement deux relations.

# Groupes de Baumslag-Solitar

Groupes à deux générateurs et une relation :

$$BS(m, n) := \langle a, t \mid t^{-1} a^m t = a^n \rangle$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

- en 1951 Higman construit un groupe  $G$  de présentation finie, isomorphe à l'un de ses sous-groupes quotient  $G/H$  non triviaux.

$$H = \langle a, t \mid at = ta^2 \rangle = BS(1, 2)$$

Higman pense qu'un tel  $G$  a nécessairement deux relations.

- En 1962 Baumslag et Solitar le contredisent avec

$$BS(2, 3) = \langle a, t \mid a^2 t = ta^3 \rangle$$

## Groupes de Baumslag-Solitar

Groupes à deux générateurs et une relation :

$$BS(m, n) := \langle a, t \mid t^{-1} a^m t = a^n \rangle$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

- en 1951 Higman construit un groupe  $G$  de présentation finie, isomorphe à l'un de ses sous-groupes quotient  $G/H$  non triviaux.

$$H = \langle a, t \mid at = ta^2 \rangle = BS(1, 2)$$

Higman pense qu'un tel  $G$  a nécessairement deux relations.

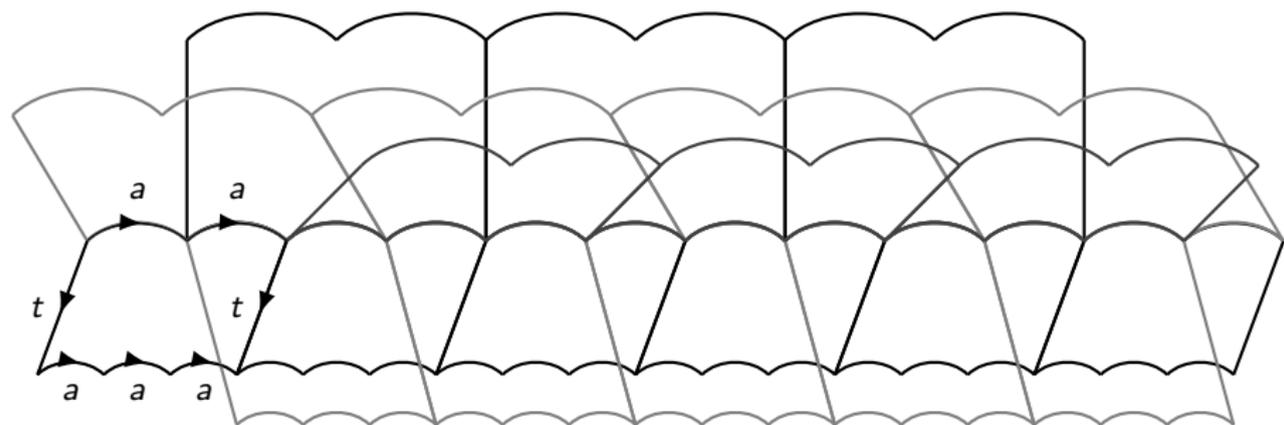
- En 1962 Baumslag et Solitar le contredisent avec

$$BS(2, 3) = \langle a, t \mid a^2 t = ta^3 \rangle$$

⇒ les groupes de Baumslag-Solitar !

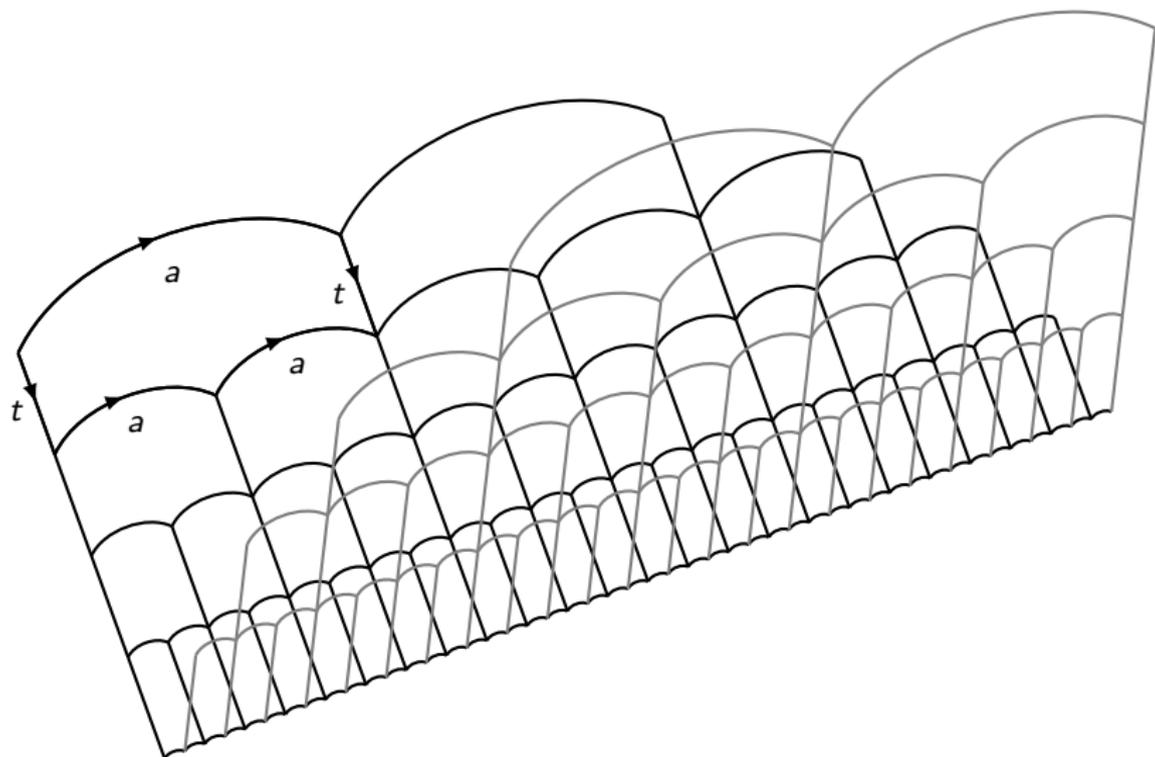
$BS(m, n)$  avec  $m, n \geq 2$

$$BS(2, 3) := \langle a, t \mid a^2 t = t a^3 \rangle$$



## Les groupes $BS(1, n)$

$$BS(1, n) := \langle a, t \mid t^{-1}at = a^n \rangle$$



# Les groupes $BS(1, n)$

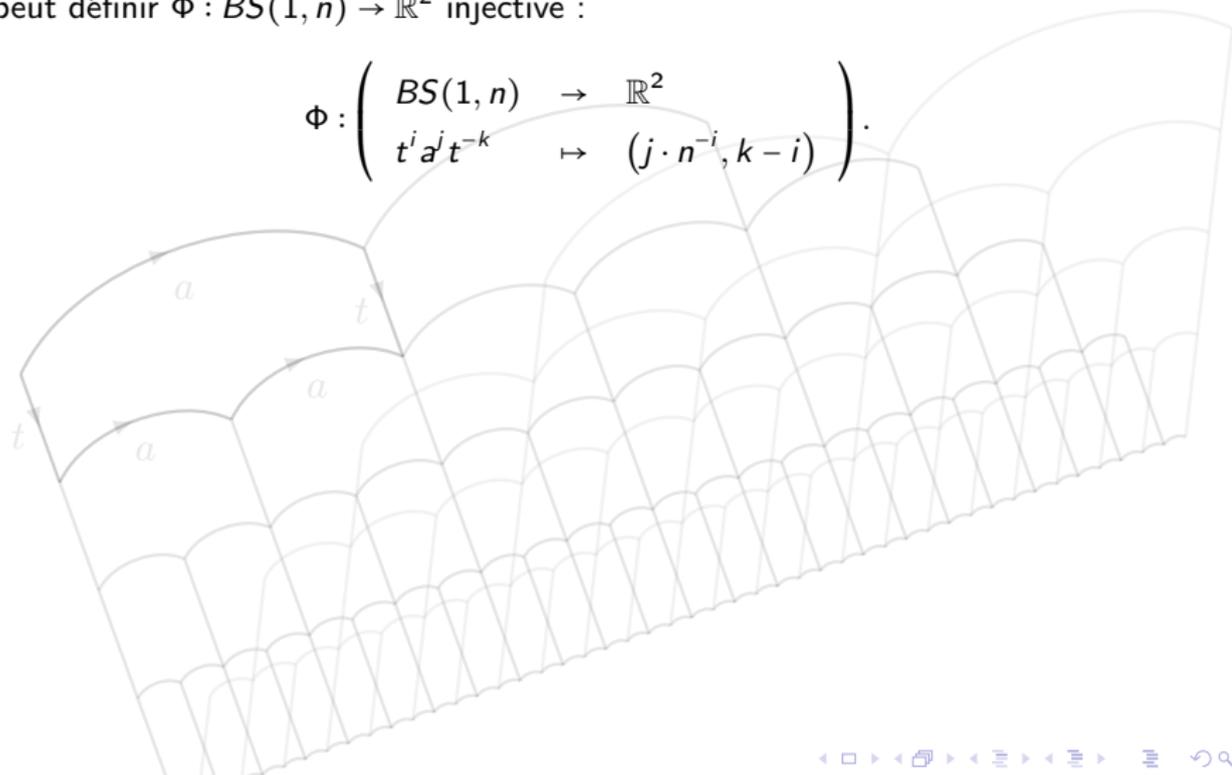
$$BS(1, n) := \langle a, t \mid t^{-1}at = a^n \rangle$$

- un relateur  $\Rightarrow$  problème du mot décidable
- moyennable
- un seul bout
- chaque feuille est un graphe d'orbite de  $a \mapsto aa$
- deux feuilles fusionnent toujours
- forme normale élégante :  $t^i a^j t^{-k}$  avec  $i, k \in \mathbb{N}$  et  $n \nmid j \in \mathbb{Z}$

# $BS(1, n)$ plongé dans $\mathbb{R}^2$

On peut définir  $\Phi : BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective :

$$\Phi : \left( \begin{array}{ll} BS(1, n) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t^i a^j t^{-k} & \mapsto (j \cdot n^{-i}, k - i) \end{array} \right).$$



# $BS(1, n)$ plongé dans $\mathbb{R}^2$

On peut définir  $\Phi : BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective :

$$\Phi : \left( \begin{array}{ll} BS(1, n) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t^i a^j t^{-k} & \mapsto (j \cdot n^{-i}, k - i) \end{array} \right).$$

$$g = t^i a^j t^{-k} \Rightarrow \Phi(g)\text{-boîte} = \Phi(g) + [0, n^{-i+k}[\times] - 1, 0] \subset \mathbb{R}^2$$

## $BS(1, n)$ plongé dans $\mathbb{R}^2$

On peut définir  $\Phi : BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective :

$$\Phi : \left( \begin{array}{ll} BS(1, n) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t^i a^j t^{-k} & \mapsto (j \cdot n^{-i}, k - i) \end{array} \right).$$

$$g = t^i a^j t^{-k} \Rightarrow \Phi(g)\text{-boîte} = \Phi(g) + [0, n^{-i+k}[\times] - 1, 0] \subset \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des  $\Phi$ -boîtes d'une même feuille de  $BS(1, n)$  forment une partition de  $\mathbb{R}^2$ .

# Plan de l'exposé

1 Dynamique symbolique sur des groupes

2 Les groupes de Baumslag-Solitar

**3 Problème du Domino et apériodicité**

4 Graphes d'orbites de substitutions

5 Superposition de graphes d'orbites

6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

## Problème du Domino d'un groupe $G$

**Problème du Domino** : étant donné  $F$  fini, le SFT  $X_F$  est-il vide ?

## Problème du Domino d'un groupe $G$

**Problème du Domino** : étant donné  $F$  fini, le SFT  $X_F$  est-il vide ?

Le problème du Domino est **décidable** pour

- $\mathbb{Z}$ , les groupes libres
- les groupes virtuellement libres

## Problème du Domino d'un groupe $G$

**Problème du Domino** : étant donné  $F$  fini, le SFT  $X_F$  est-il vide ?

Le problème du Domino est **décidable** pour

- $\mathbb{Z}$ , les groupes libres
- les groupes virtuellement libres

Le problème du Domino est **indécidable** pour

- $\mathbb{Z}^2$  (Berger 1964, Robinson 1971)
- les groupes polycycliques non cycliques (Jeandel, 2015)
- les groupes de Baumslag-Solitar (A. & Kari, 2013)
- les groupes  $G_1 \times G_2$  (Jeandel, 2015) ( $\Rightarrow$  le groupe de Grigorchuk)
- les groupes de surface (A., Barbieri & Moutot 2019)
- + propriétés d'hérédité par sous-groupe/quotient/quasi-isométrie/action translation-like

## La conjecture du Domino

### Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).
- Les graphes de largeur arborescente bornée sont exactement ceux avec MSO décidable (Kuske & Lorhey, 2005).

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).
- Les graphes de largeur arborescente bornée sont exactement ceux avec MSO décidable (Kuske & Lorhey, 2005).
- Si un groupe n'est pas virtuellement libre, alors il possède des grilles de tailles arbitraires comme mineurs (Robertson & Seymour, 1986).

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).
- Les graphes de largeur arborescente bornée sont exactement ceux avec MSO décidable (Kuske & Lorhey, 2005).
- Si un groupe n'est pas virtuellement libre, alors il possède des grilles de tailles arbitraires comme mineurs (Robertson & Seymour, 1986).
- Où sont ces grilles ? Comment les coder dans un SFT ?

## Apériodicité : définition

Si  $x \in A^G$ , son **stabilisateur** est

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid \Theta_g(x) = x\}.$$

Un sous-décalage  $X$  est **fortement apériodique** si toutes ses configurations ont stabilisateur trivial.

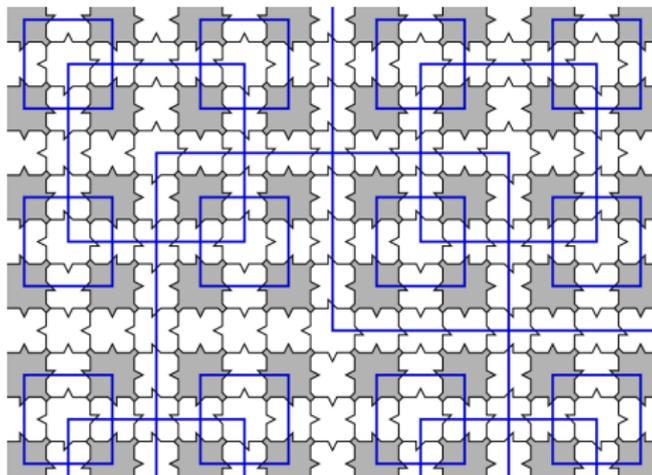
## Apériodicité : définition

Si  $x \in A^G$ , son **stabilisateur** est

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid \Theta_g(x) = x\}.$$

Un sous-décalage  $X$  est **fortement apériodique** si toutes ses configurations ont stabilisateur trivial.

Exemple sur  $\mathbb{Z}^2$  :



## Résultats positifs :

- $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  a un SFT fortement apériodique (Robinson 1971, Kari & Culik 1996)
- les groupes de surface, les groupes hyperboliques (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck 2017)
- les groupes  $\mathbb{Z}^2 \rtimes_f H$  où  $H$  a problème du mot décidable (Barbieri & Sablik 2019)

### Résultats positifs :

- $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  a un SFT fortement apériodique (Robinson 1971, Kari & Culik 1996)
- les groupes de surface, les groupes hyperboliques (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck 2017)
- les groupes  $\mathbb{Z}^2 \rtimes_f H$  où  $H$  a problème du mot décidable (Barbieri & Sablik 2019)

### Obstructions :

- si  $G$  a au moins deux bouts, alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Cohen 2017)
- si  $G$  a problème du mot indécidable alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Jeandel 2015)

# Apériodicité : résultats

## Résultats positifs :

- $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  a un SFT fortement apériodique (Robinson 1971, Kari & Culik 1996)
- les groupes de surface, les groupes hyperboliques (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck 2017)
- les groupes  $\mathbb{Z}^2 \rtimes_f H$  où  $H$  a problème du mot décidable (Barbieri & Sablik 2019)

## Obstructions :

- si  $G$  a au moins deux bouts, alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Cohen 2017)
- si  $G$  a problème du mot indécidable alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Jeandel 2015)

## Question

Un groupe  $G$  possède un SFT fortement apériodique <sup>?</sup>ssi  $G$  a un seul bout et problème du mot décidable.

# Plan de l'exposé

- 1 Dynamique symbolique sur des groupes
- 2 Les groupes de Baumslag-Solitar
- 3 Problème du Domino et apériodicité
- 4 Graphes d'orbites de substitutions**
- 5 Superposition de graphes d'orbites
- 6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

## Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

## Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  surjective croissante

(fonction parent)

$$\omega, \omega' \in A^{\mathbb{Z}} :$$

$$\sigma(\omega) =_P \omega' \text{ si } \forall i, \sigma(\omega_i) = \omega'_{P^{-1}(i)}$$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

## Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  surjective croissante  
(fonction parent)

$$\omega, \omega' \in A^{\mathbb{Z}} :$$

$$\sigma(\omega) =_P \omega' \text{ si } \forall i, \sigma(\omega_i) = \omega'_{|P^{-1}(i)}$$

$$M_\sigma = (m_{ij}) \text{ avec } m_{ij} = |\sigma(a_i)|_j$$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

$$M_{0 \mapsto 00} = (2) \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  surjective croissante  
(fonction parent)

$$\omega, \omega' \in A^{\mathbb{Z}} :$$

$$\sigma(\omega) =_P \omega' \text{ si } \forall i, \sigma(\omega_i) = \omega'_{|P^{-1}(i)}$$

$$M_\sigma = (m_{ij}) \text{ avec } m_{ij} = |\sigma(a_i)|_j$$

Si  $\sigma$  est primitive ( $m_{ij} > 0$ ) :

- $\exists \lambda$  v. p. t.q.  $\lambda > |\mu| \forall \mu$  v.p.  $\neq \lambda$
- $\exists v \in (\mathbb{R}^+)^n$  t.q.  $M_\sigma v = \lambda v$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

$$M_{0 \mapsto 00} = (2)$$

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

$$v = (1)$$

$$\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Graphe d'orbite

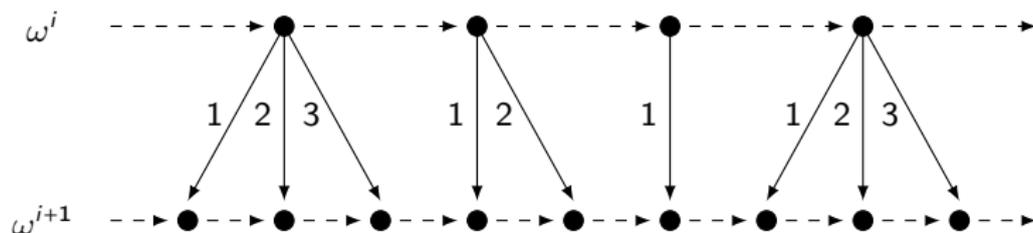
$\sigma : A \rightarrow A^*$  primitive et  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une orbite de  $\sigma$

On associe à l'orbite  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  un graphe dont les sommets sont  $\mathbb{Z}^2$  :

## Grphe d'orbite

$\sigma : A \rightarrow A^*$  primitive et  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une orbite de  $\sigma$

On associe à l'orbite  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  un graphe dont les sommets sont  $\mathbb{Z}^2$  :

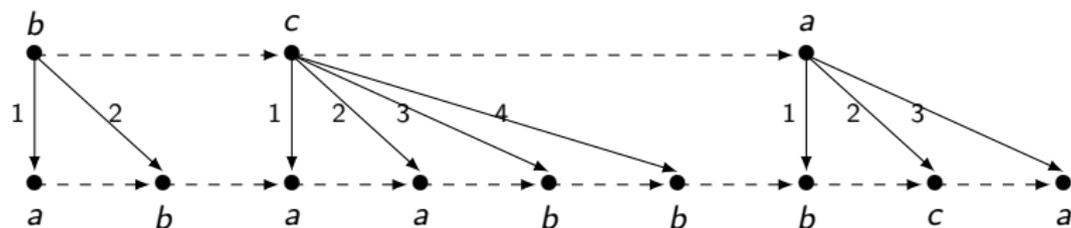


avec

- une arête pointillée entre  $\omega_j^i$  et  $\omega_{j+1}^i$  ;
- une arête étiquetée par  $k$  entre  $\omega_j^i$  et son  $k$ ième enfant.

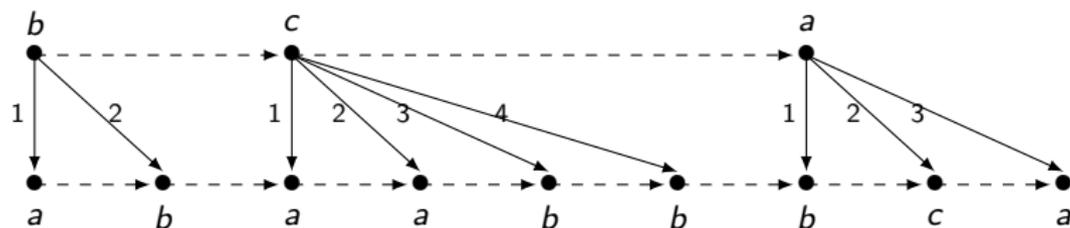
# Grappe d'orbite

Exemple avec  $\sigma(a) = bca$ ,  $\sigma(b) = ab$ ,  $\sigma(c) = aabb$  :

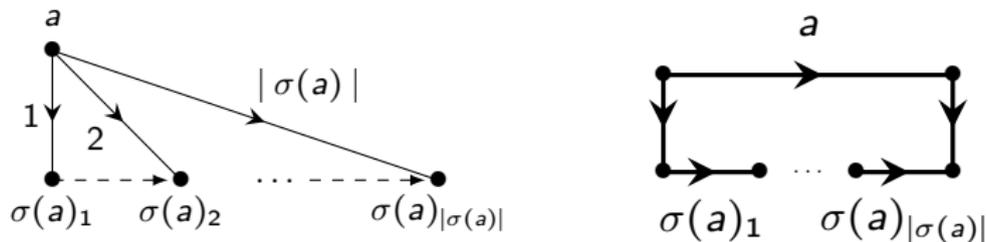


# Graphe d'orbite

Exemple avec  $\sigma(a) = bca$ ,  $\sigma(b) = ab$ ,  $\sigma(c) = aabb$  :

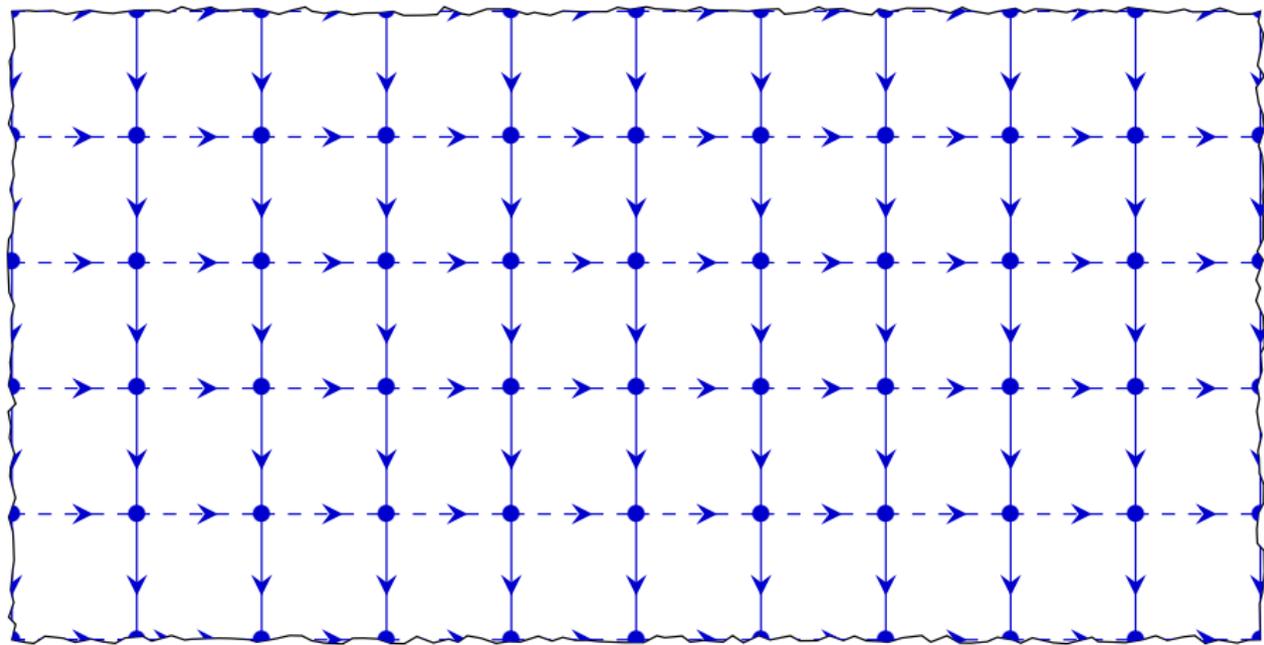


Graphe d'orbite et son dual

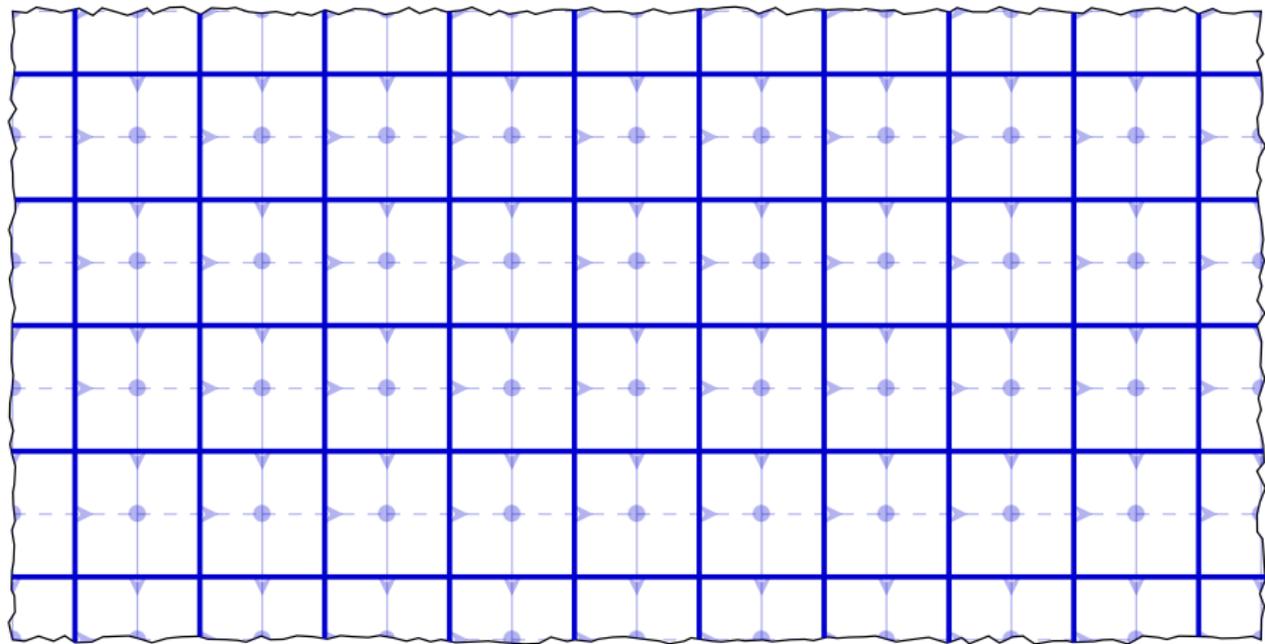


Exemple 1 :  $\sigma(a) = a$

Exemple 1 :  $\sigma(a) = a$



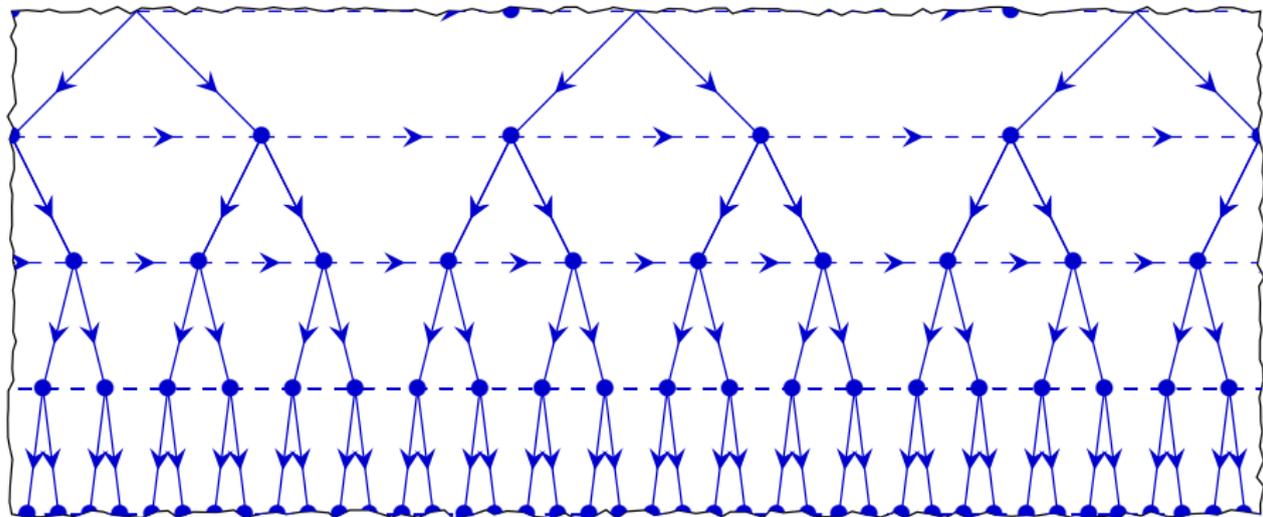
Exemple 1 :  $\sigma(a) = a$



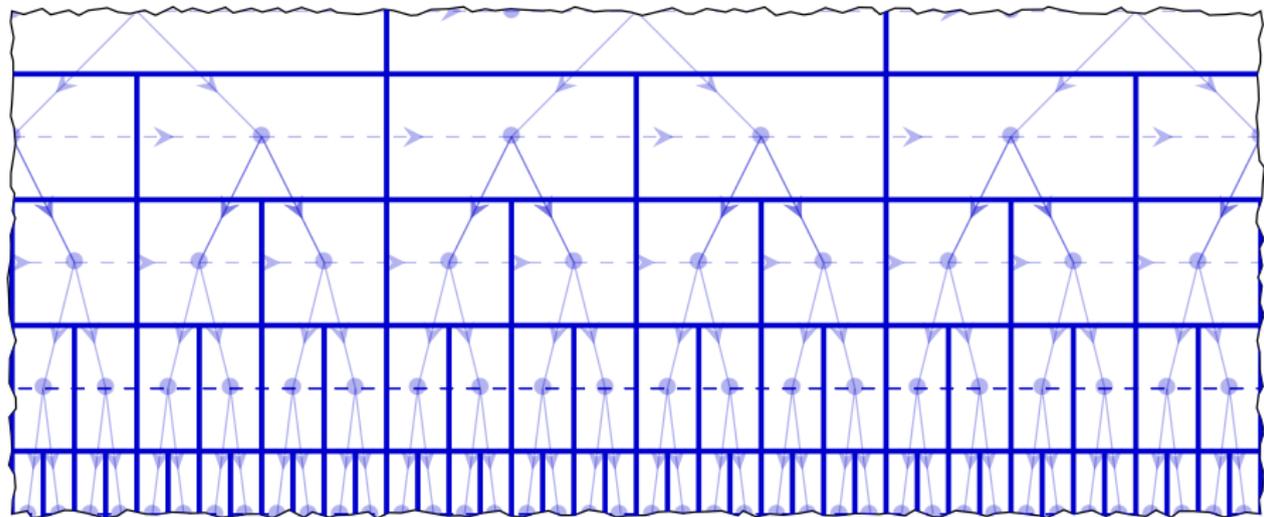
$\mathbb{Z}^2$

Exemple 2 :  $\sigma(a) = aa$

Exemple 2 :  $\sigma(a) = aa$



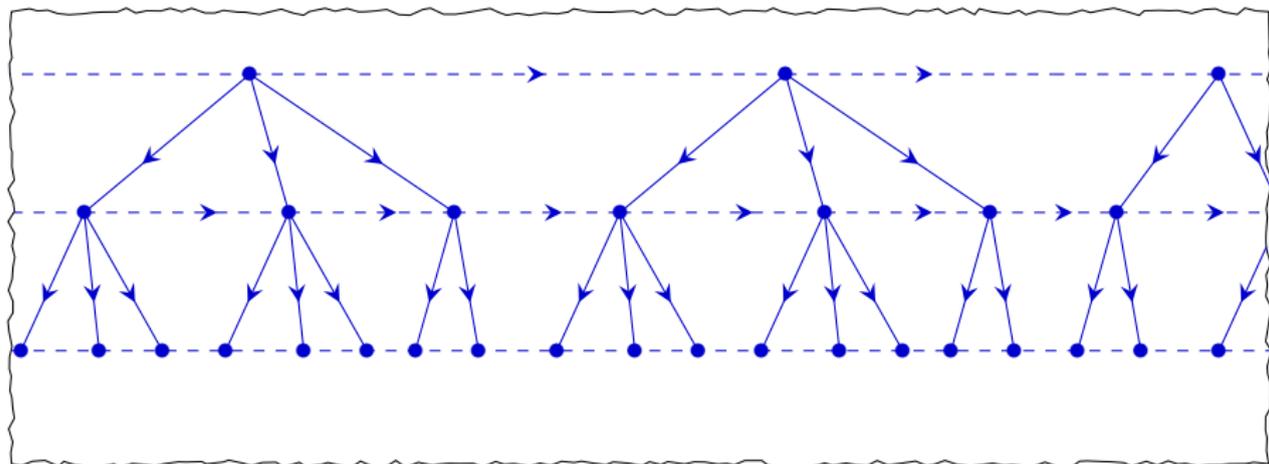
Exemple 2 :  $\sigma(a) = aa$



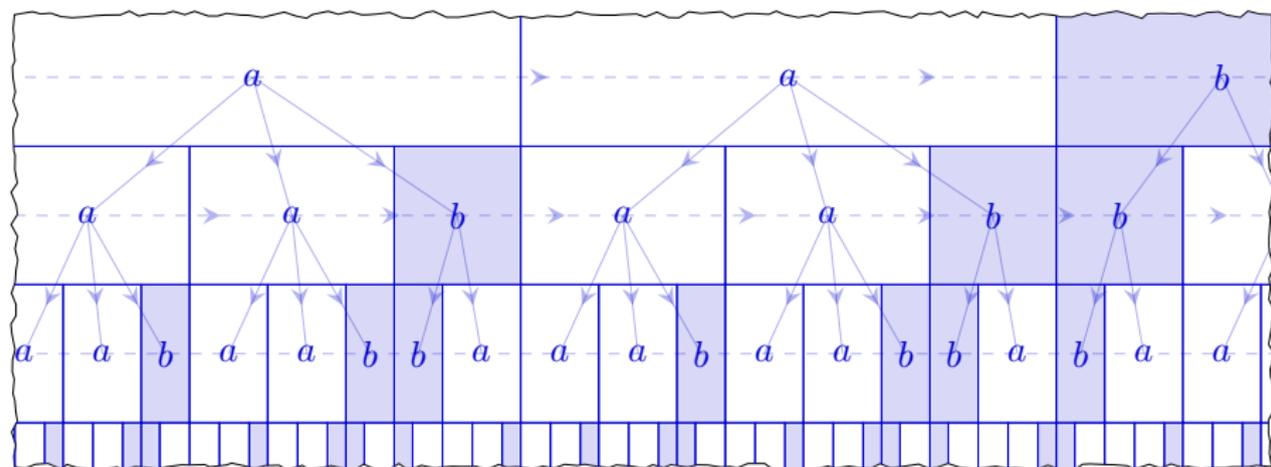
pavage de  $\mathbb{H}_2$  par des pentagones

Exemple 3 :  $\sigma(a) = aab$ ,  $\sigma(b) = ba$

Exemple 3 :  $\sigma(a) = aab$ ,  $\sigma(b) = ba$



Exemple 3 :  $\sigma(a) = aab$ ,  $\sigma(b) = ba$

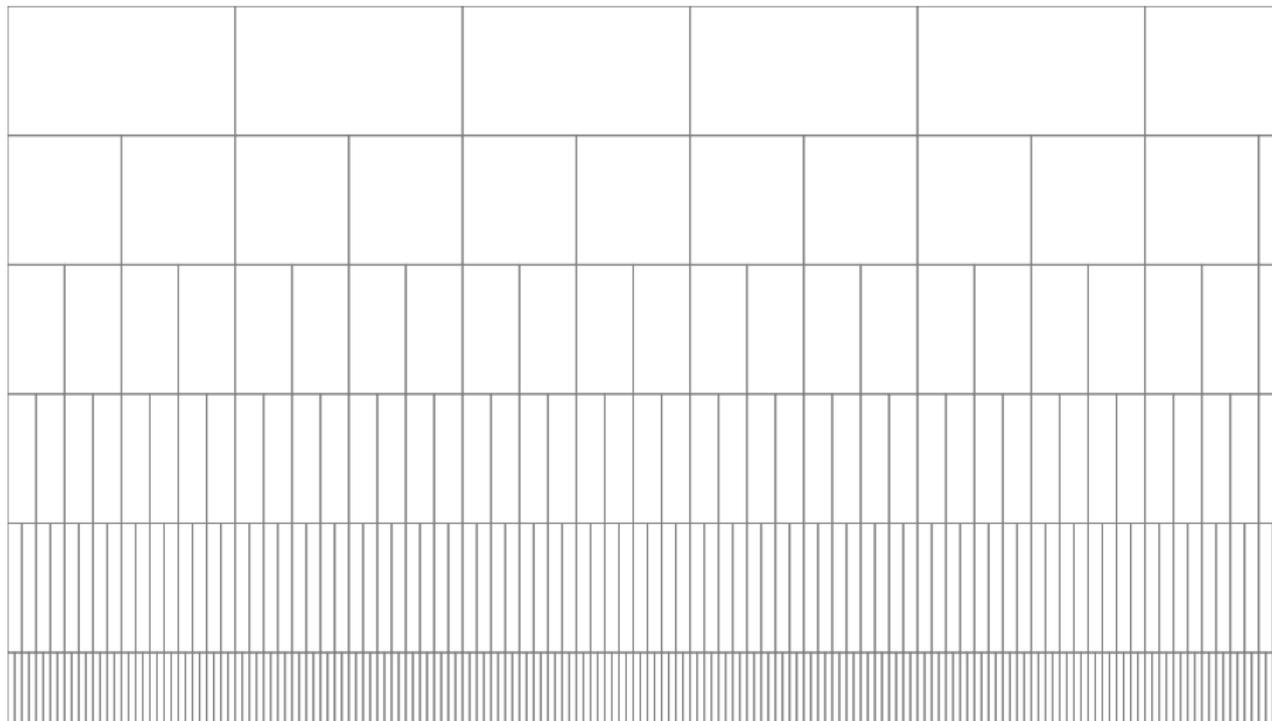


pavage de  $\mathbb{H}_2$  par deux tuiles  $a$  et  $b$

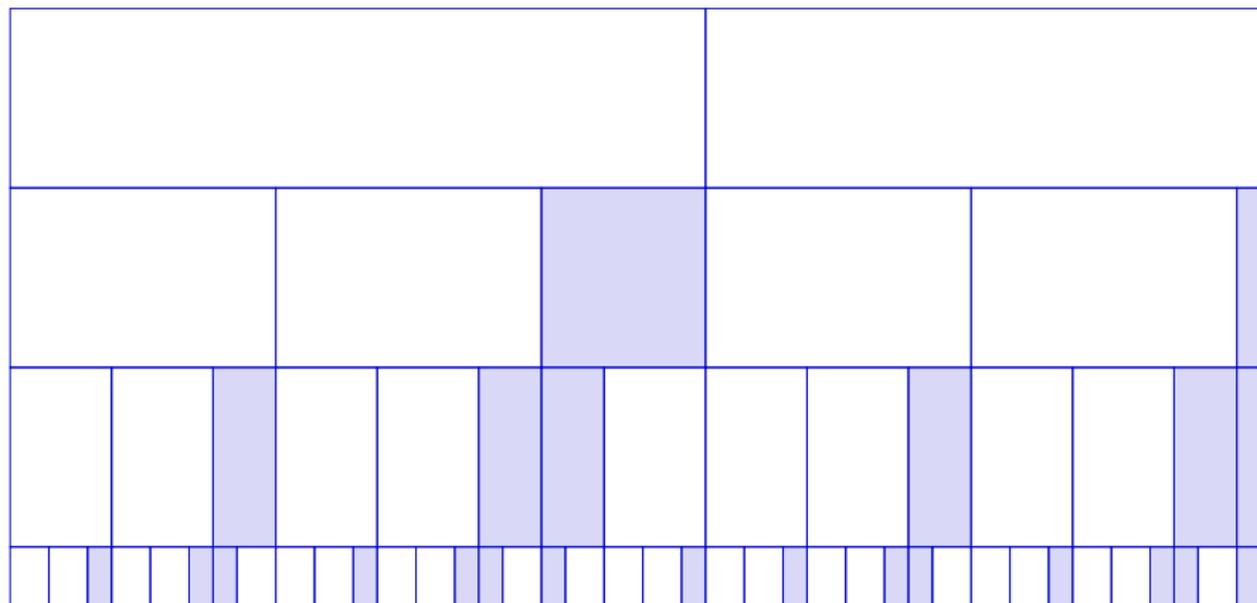
# Plan de l'exposé

- 1 Dynamique symbolique sur des groupes
- 2 Les groupes de Baumslag-Solitar
- 3 Problème du Domino et apériodicité
- 4 Graphes d'orbites de substitutions
- 5 Superposition de graphes d'orbites**
- 6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

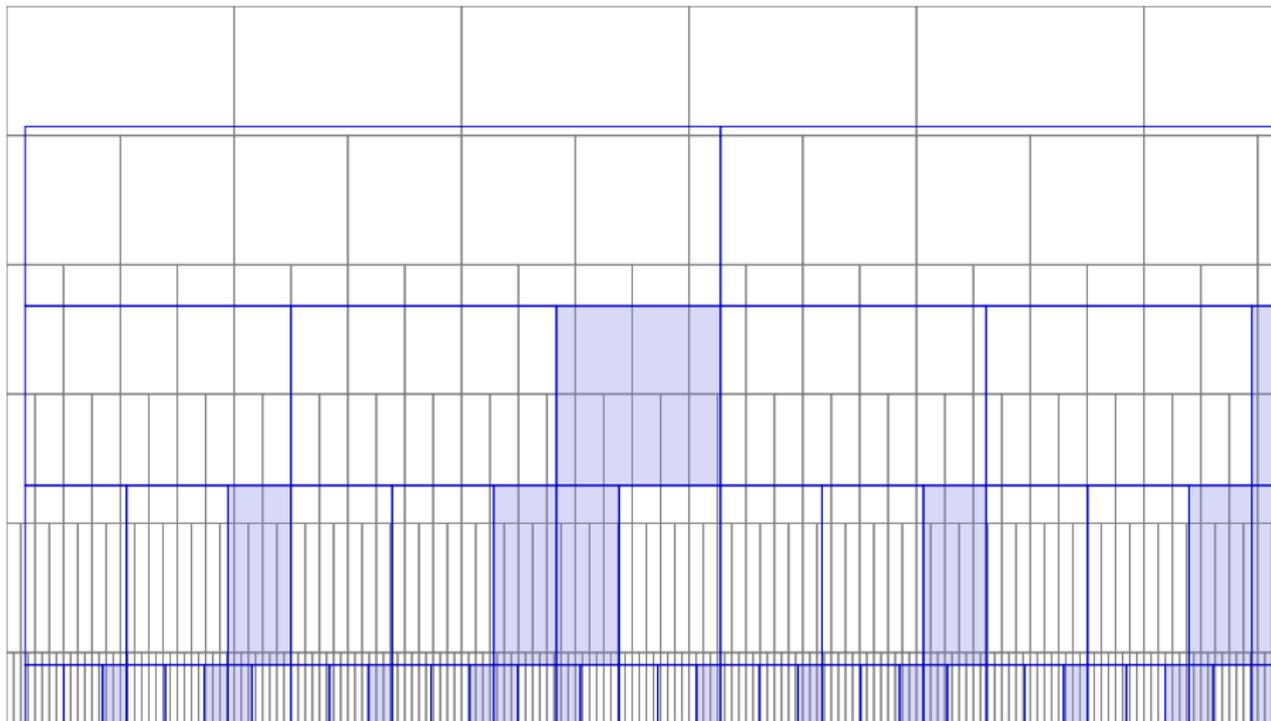
# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites

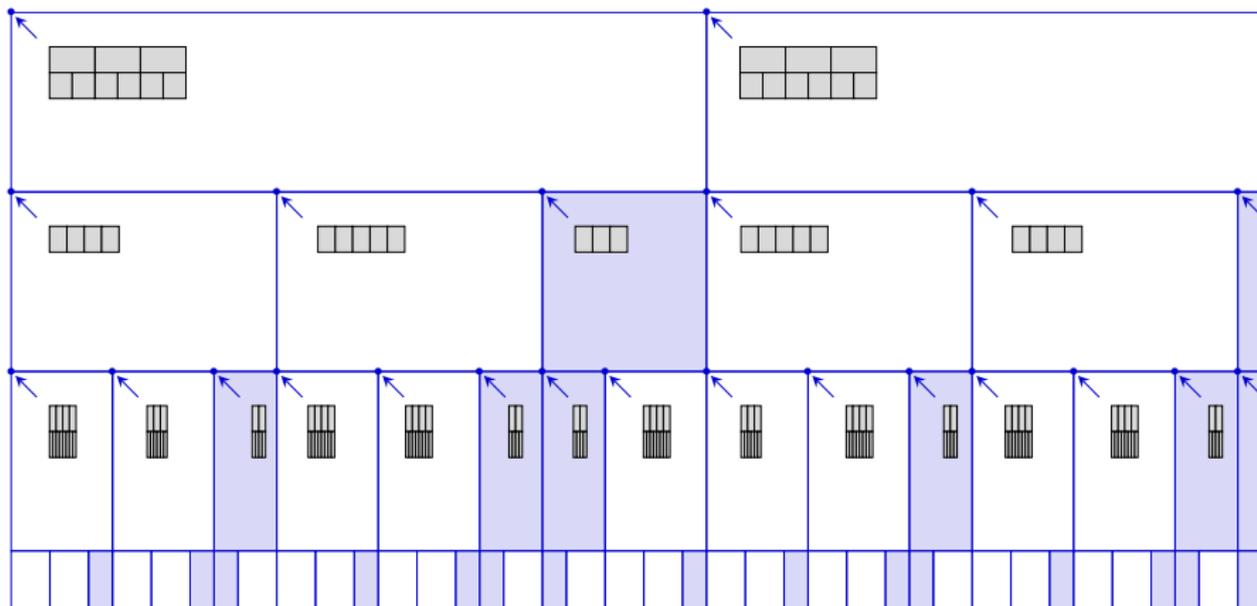




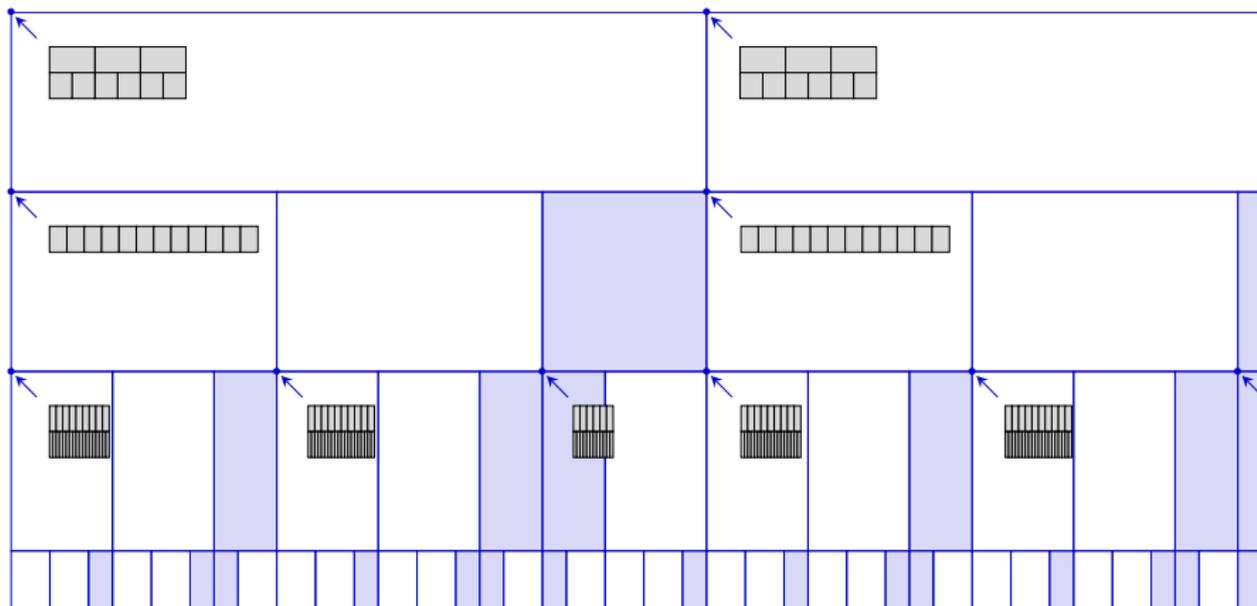
# Superposition de graphes d'orbites



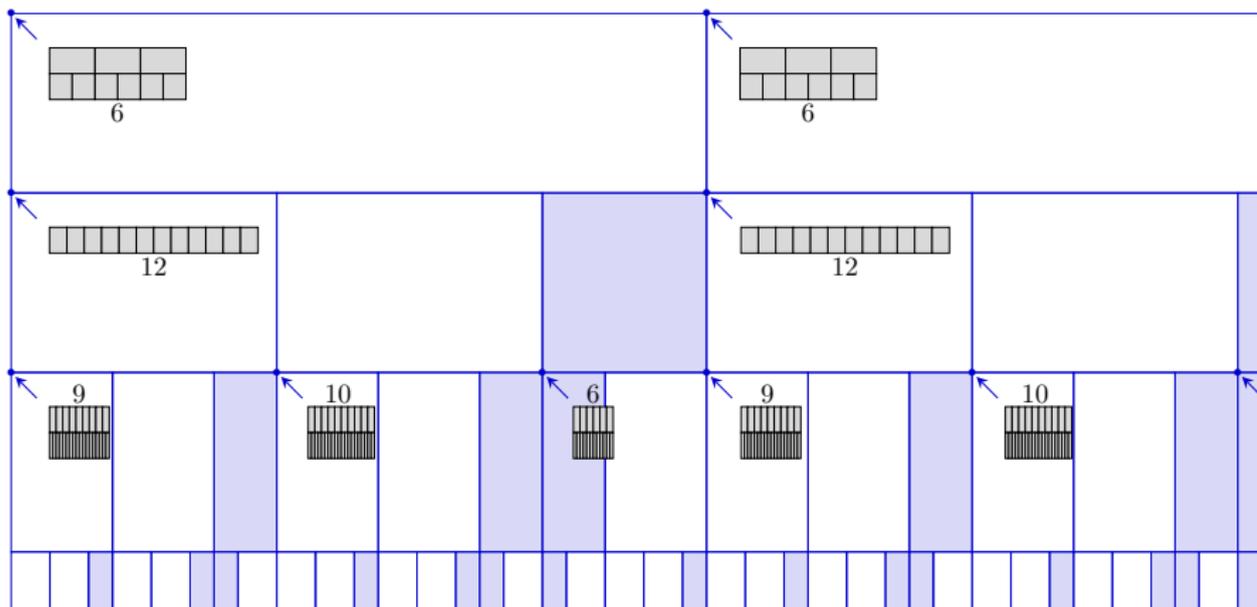
# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites



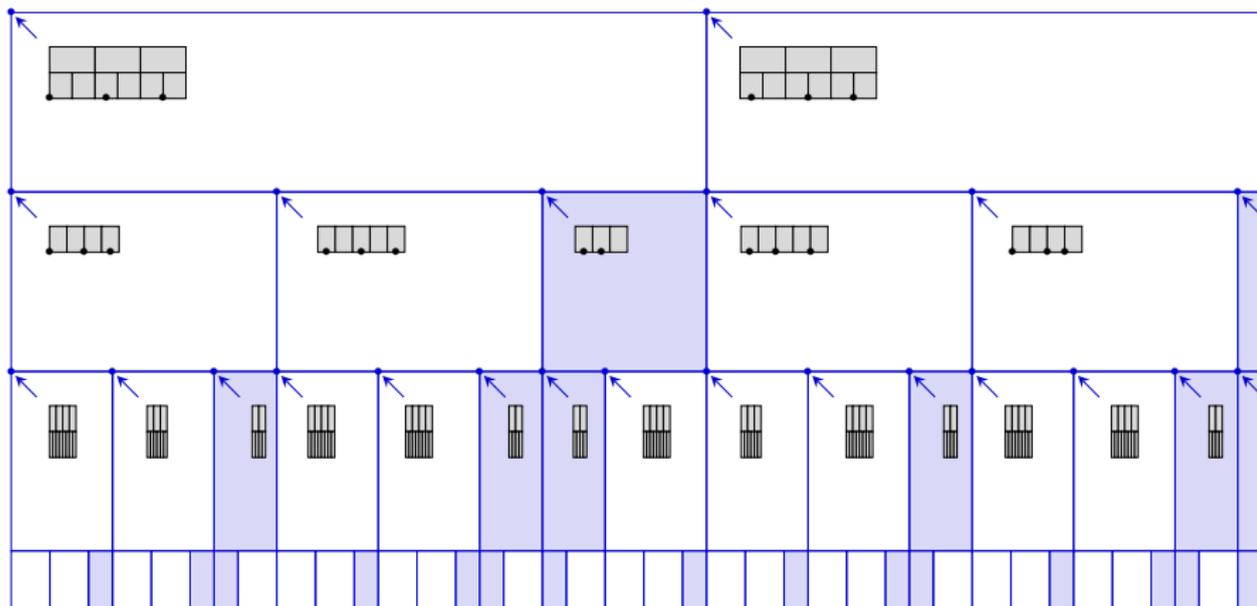
# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites



## Superposition de graphes d'orbites

≈ Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux substitutions avec  $\lambda, \lambda' > 1$ , alors on peut coder un **graphe d'orbite de  $\sigma'$**  comme un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma$** .

## Superposition de graphes d'orbites

≈ Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux substitutions avec  $\lambda, \lambda' > 1$ , alors on peut coder un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma'$**  comme un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma$** .

combiné avec

Théorème (Kari 2007)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites de  $a \mapsto aa$ .

## Superposition de graphes d'orbites

≈ Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux substitutions avec  $\lambda, \lambda' > 1$ , alors on peut coder un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma'$**  comme un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma$** .

combiné avec

Théorème (Kari 2007)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites de  $a \mapsto aa$ .

on obtient

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

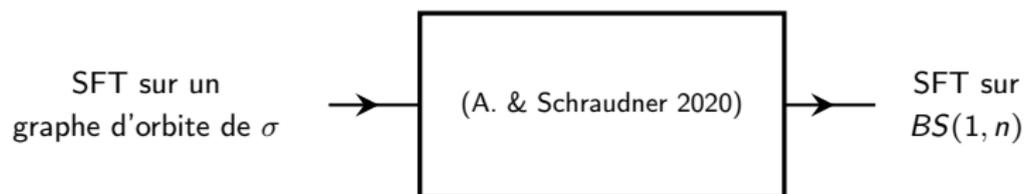
Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites d'une substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$ .

# Plan de l'exposé

- 1 Dynamique symbolique sur des groupes
- 2 Les groupes de Baumslag-Solitar
- 3 Problème du Domino et apériodicité
- 4 Graphes d'orbites de substitutions
- 5 Superposition de graphes d'orbites
- 6 Des graphes d'orbites à  $BS(1, n)$

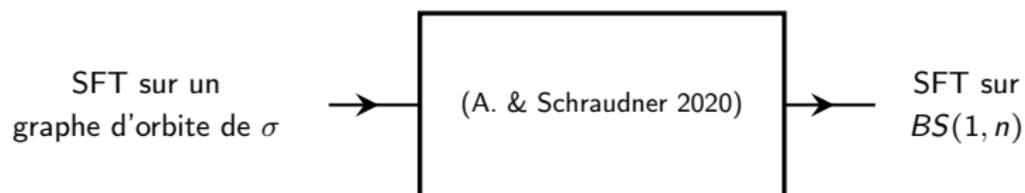
## Des graphes d'orbites à $BS(1, n)$

Technique générale pour toute substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$  :



## Des graphes d'orbites à $BS(1, n)$

Technique générale pour toute substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$  :



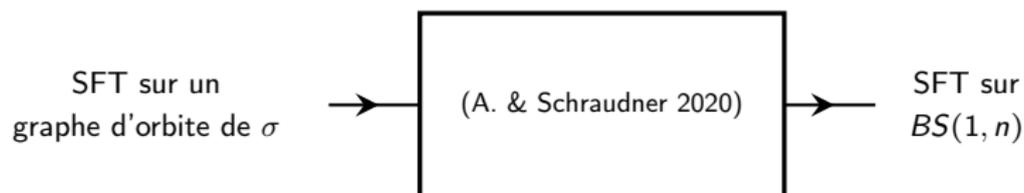
**Applications :**

Théorème (A. & Schraudner 2020)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, n)$ .

## Des graphes d'orbites à $BS(1, n)$

Technique générale pour toute substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$  :



### Applications :

Théorème (A. & Schraudner 2020)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, n)$ .

Théorème (A. & Schraudner 2020)

Il existe un SFT **fortement** apériodique sur  $BS(1, n)$ .

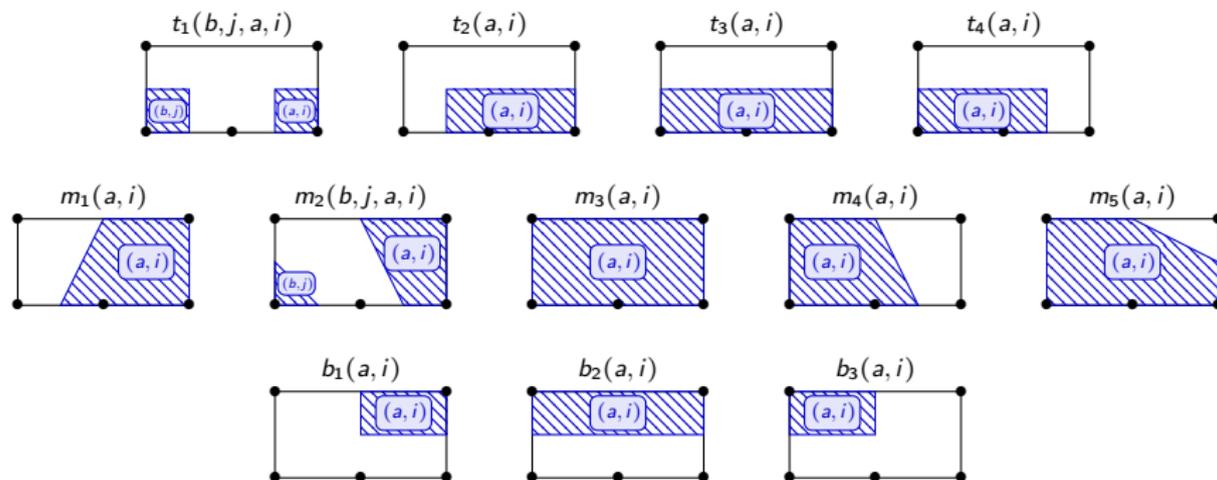
## Idée de la construction (I)

On replie  $BS(1, n)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et on superpose un graphe d'orbite.

## Idee de la construction (I)

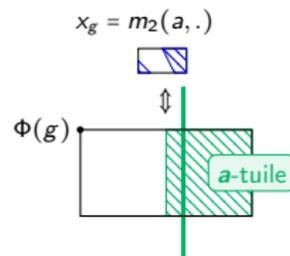
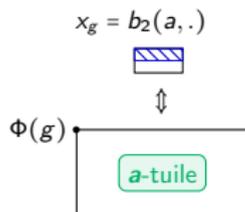
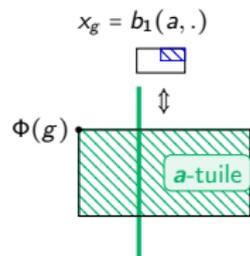
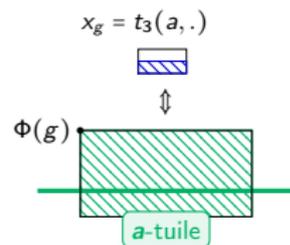
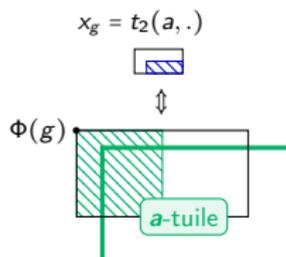
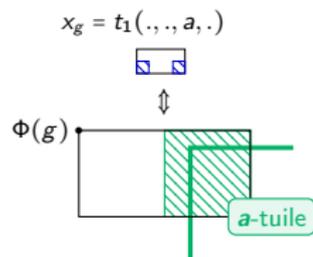
On plie  $BS(1, n)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et on superpose un graphe d'orbite.

Chaque  $g \in BS(1, n)$  code le contenu de sa  $\Phi$ -boîte.



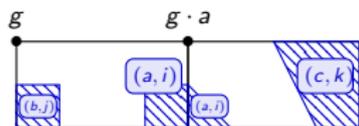
# Idée de la construction (II)

## Intuition derrière l'alphabet



## Idée de la construction (III)

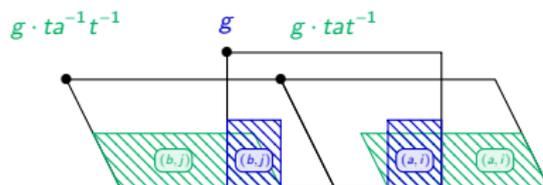
Règles locales pour dessiner des rectangles :



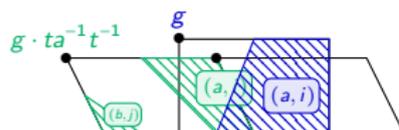
$$\begin{cases} x_g &= t_1(b, j, a, i) \\ x_{g \cdot a} &= m_2(a, i, c, k) \end{cases} \quad \times$$

## Idée de la construction (III)

Règles locales pour synchroniser les feuilles :



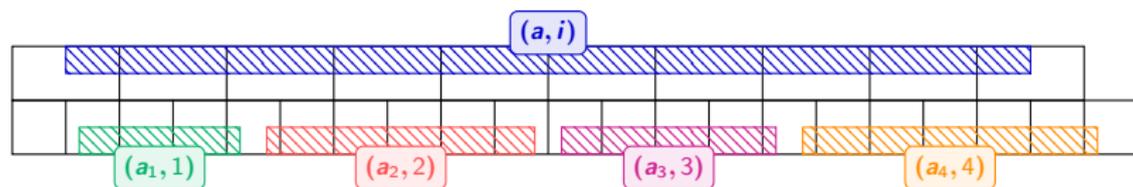
$$x_g = t_1(b, j, a, i) \Rightarrow \begin{cases} x_{g \cdot tat^{-1}} = t_2(a, i) \\ x_{g \cdot ta^{-1}t^{-1}} = t_4(b, j) \end{cases}$$



$$x_g = m_1(a, i) \Leftrightarrow x_{g \cdot ta^{-1}t^{-1}} = m_2(b, j, a, i)$$

## Idée de la construction (IV)

Règles locales pour coder la substitution :



avec  $\sigma(a) = a_1 \dots a_{|\sigma(a)|}$

## Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

## Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

**Sens facile** : d'un graphe d'orbite vers  $BS(1,2)$

## Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

**Sens facile** : d'un graphe d'orbite vers  $BS(1,2)$

**Plus délicat** : de  $BS(1,2)$  vers un graphe d'orbite

- chaque feuille de  $BS(1,2)$  code un graphe d'orbite
- ce sont tous les mêmes !

## Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

**Sens facile** : d'un graphe d'orbite vers  $BS(1,2)$

**Plus délicat** : de  $BS(1,2)$  vers un graphe d'orbite

- chaque feuille de  $BS(1,2)$  code un graphe d'orbite
- ce sont tous les mêmes !

**Théorème (A. & Schraudner 2020)**

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, n)$ .

**Théorème (A. & Schraudner 2020)**

Il existe un SFT **fortement** apériodique sur  $BS(1, n)$ .

## Pour aller plus loin...

- groupes  $BS(1, n)$  plutôt bien compris
- caractériser les entropies des SFT ?
- SFT fortement apériodique pour  $BS(m, n)$  ?
- groupes à un relateur ?

## Pour aller plus loin...

- groupes  $BS(1, n)$  plutôt bien compris
- caractériser les entropies des SFT ?
- SFT fortement apériodique pour  $BS(m, n)$  ?
- groupes à un relateur ?

Merci :-)