$SL(2)$ NOTES PROVISOIRES

JEAN-PIERRE LABESSE

Résumé. Nous explicitons la stabilisation locale et globale de la formule des traces pour $SL(2)$ en donnant des formulations et des preuves valables en toute caractéristique. Quelques faits nouveaux apparaissent en caractéristique 2. Le développement asymptotique pour les intégrales orbitales locales au voisinage de l'identité, obtenu via la stabilisation, est équivalent au développement en germes de Shalika en caractéristique $p \neq 2$ mais il est nouveau en caractéristique 2. De même le développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces (globale) ne peut pas être obtenu par les techniques d'Arthur en caractéristique 2 et nécessite une pré-stabilisation.

Table des matières

Date: 15 mai 2024.

Introduction

L'essentiel des résultats de cette note a été exposé lors d'une conférence à Budapest en août 1971, à l'exception de ce qui concerne les germes, encore que ceci est implicite dans la preuve de l'existence du transfert endoscopique. Il s'agissait là de la première forme d'un travail en collaboration avec Langlands initié à Bonn entre avril et juin 1971 et qui s'est poursuivi dans les années ultérieures.

Dans les proceedings de la conférence de Budapest on trouvera dans [Lab1] une esquisse très sommaire des arguments. L'article [LL] donne une preuve détaillée mais qui, contrairement à [Lab1], se limite à la caractéristique nulle. Le cas des corps de caractéristique positive aurait imposé quelques développements supplémentaires, d'ailleurs présents dans les notes préparatoires. Les difficultés de la caractéristique positive sont de deux ordres : du point de vue géométrique, les contributions unipotentes pour $SL(2)$ doivent être traitées différemment en caractéristique 2, et du point de vue spectral il n'était pas connu à l'époque que les caractères des représentations admissibles irréductibles de $SL(2, F)$, où F est un corps local, étaient représentables par des fonctions localement intégrables, ce qui est maintenant établi dans [Le].

On observera que l'article [LL], essentiellement rédigé par Langlands, n'a été soumis pour publication qu'en 1977 après la rédaction de [Lan] de sorte que divers lemmes techniques indispensables dans [Lan], mais qui résultaient de notre collaboration et avaient leur place dans [LL], ont été incorporés dans [Lan].

Nous complétons ici ces articles anciens en donnant des preuves complètes en toute caractéristique. L'essentiel des argument, sauf ce qui est spécifique à la caractéristique 2, se trouve déjà dans [LL]. Contrairement à [LL], et pour simplifier, nous nous limitons au groupe $SL(2)$ et à ses formes intérieures. Nous ne traitons pas les groupes intermédiaires entre $SL(2)$ et $GL(2)$ définis par une condition de nature arithmétique sur le déterminant, ce qui était utile pour tester des conjectures sur les variétés de Shimura, mais ne présente pas de difficulté nouvelles autres que des complications de notation.

On appelle stabilisation, ou endoscopie, l'étude du comportement par conjugaison stable (qui dans notre exemple se réduit à la conjugaison sous $GL(2, F)$) des intégrales orbitales et des caractères de représentations irréductibles pour $SL(2, F)$. Nous commencerons par la stabilisation des intégrales orbitales des éléments semi-simples pour $SL(2)$ sur un corps local. Les deux résultats importants sont l'existence du transfert endoscopique et le Lemme Fondamental.

Le transfert endoscopique fournit un développement asymptotique au voisinage de 1 valable sur un corps local $\mathfrak{p}$-adique en toute caractéristique. En caractéristique $p \neq 2$ ce développement est équivalent, modulo une transformée de Fourier, au développement en germes de Shalika mais il est nouveau en caractéristique 2. L'observation principale est que pour $p = 2$ les orbites unipotentes ne sont pas les bons objets pour paramétrer un développement asymptotique car, sur un corps local en caractéristique 2, les orbites unipotentes pour $SL(2)$ forment un ensemble infini non dénombrable. Nous étudierons ensuite la stabilisation locale du point de vue spectral c'est-à-dire l'étude des L-paquets et du transfert spectral. La représentation de Weil fournit une construction explicite des L-paquets.

Dans un second temps nous rappellerons la formule des traces pour $SL(2)$ sur un corps global. On note ρ la représentation régulière droite dans l'espace de Hilbert

$$L^2\big(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)\big)$$

et soit

$$\rho(f) = \int_{G(\mathbb{A}_F)} \rho(x) f(x)\, dx$$

l'opérateur défini par l'intégrale (faible) de ρ contre une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty\big(G(\mathbb{A}_F)\big)$. On s'intéresse au spectre discret $L^2_{disc}\big(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)\big) \subset L^2\big(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)\big)$. On souhaite avoir une formule géométrique pour calculer la trace de l'opérateur $\rho(f)$ restreint au spectre discret :

$$\mathrm{trace}\,\Big(\rho(f)\Big|L^2_{disc}\big(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)\big)\Big)\ .$$

On définit par troncature spectrale une variante de cette trace

$$J_{spec}(f) = \mathrm{trace}\,\Big(\rho(f)\Big|L^2_{disc}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)\Big) + c(f)$$

où $c(f)$ est un terme complémentaire explicite. L'expression géométrique $J_{geom}(f)$ est elle obtenue par une troncature de l'intégrale sur la diagonale du noyau représentant l'opérateur $\rho(f)$. La formule des traces est une identité

$$J_{geom}(f) = J_{spec}(f)$$

qui, pour $SL(2)$, remonte pour l'essentiel à Selberg [Se].

La stabilisation de la formule des traces est son écriture comme somme de distributions stablement invariantes (ce qui dans notre cas est l'invariance par conjugaison sous $GL(2, \mathbb{A}_F)$) et de termes correctifs, appelés contributions endoscopiques : elles mesurent la différence entre la formule des traces "à la Selberg" et sa variante stable. Pour $G = SL(2)$ ou pour G' une forme intérieure, ces termes correctifs proviennent de distributions sur des tores. Cela se fait sans difficultés, une fois connus le transfert et le Lemme Fondamental, pour les formes intérieures G' non déployées car pour de tels groupes le quotient $G'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$ est compact et la formule des traces est une identité entre distributions invariantes sous $G'(\mathbb{A}_F)$. Pour $G = SL(2)$ la non compacité du quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ impose l'utilisation de troncatures qui produisent des distributions non-invariantes sous $SL(2, \mathbb{A}_F)$ ce qui rend plus délicate l'étude de la conjugaison sous $GL(2, \mathbb{A}_F)$. C'est pourquoi on parle de forme non-invariante de la formule des traces et il est classique (cf. [LL], [A4, A5, A6] et [MW]) de passer d'abord à une forme invariante avant de tenter de la stabiliser. Mais, comme dans [Lab1], nous ferons la stabilisation en partant de la forme non-invariante ; le passage à une forme invariante sera la dernière étape.

Une première étape appelée pré-stabilisation permet d'obtenir la forme fine du développement géométrique c'est-à-dire une expression qui est somme de produits d'intégrales locales. Une telle pré-stabilisation semble une étape indispensable si on veut travailler en toutes caractéristiques car, comme dans le cas des germes évoqués ci-dessus, les techniques classiques (généralisées par Arthur [A3] aux groupes réductifs généraux en caractéristique zéro) ne sont pas utilisables pour calculer la contribution unipotente en caractéristique 2.

En combinant la pré-stabilisation avec le transfert on obtient une écriture du côté géométrique $J_{geom}(f)$ et du côté spectral $J_{spec}(f)$ de la formule des traces non-invariante comme une somme

$$J_\bullet(f)=\sum_{\mathcal{E}} SJ^{\mathcal{E}}_\bullet(f^{\mathcal{E}})$$

indexée par les données endoscopiques, où les divers termes vérifient des identités

$$J_{geom}(f)=J_{spec}(f)\quad\text{et}\quad SJ^{\mathcal{E}}_{geom}(f^{\mathcal{E}})=SJ^{\mathcal{E}}_{spec}(f^{\mathcal{E}})\ .$$

Les distributions $SJ^{\mathcal{E}}_\bullet(f^{\mathcal{E}})$ sont ce que nous appellerons les termes géométriques (resp. spectraux) de la formule des traces $\mathcal{T}$-stable pour les divers groupes endoscopiques, à savoir $SL(2)$ lui même et les tores attachés aux extensions quadratiques séparables.

La formule des traces pour les tores est automatiquement stable car ce sont des groupes abéliens. Le passage à la forme stablement-invariante à partir de la formule $\mathcal{T}$-stable pour $SL(2)$ peut alors se faire comme dernière étape et la formule des traces invariante est une somme d'expressions stablement invariantes sur chaque groupe endoscopique

$$I_\bullet(f)=\sum_{\mathcal{E}} SI^{\mathcal{E}}_\bullet(f^{\mathcal{E}})$$

et on a les identités de formules des traces invariantes et stablement invariantes :

$$I_{geom}(f)=I_{spec}(f)\quad\text{et}\quad SI^{\mathcal{E}}_{geom}(f^{\mathcal{E}})=SI^{\mathcal{E}}_{spec}(f^{\mathcal{E}})\ .$$

1. Préliminaires

1.1. **Corps et extensions quadratiques.** Dans toute la suite F désigne un corps local ou global de caractéristique $p \geq 0$. Si F est un corps local non archimédien, on note $\mathfrak{O}_F$ l'anneau des entiers, ϖ_F une uniformisante, $\mathfrak{p}_F = \varpi_F \mathfrak{O}_F$ son idéal maximal et $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel. Lorsque F est global on note $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F. Si F est un corps de nombres on pose

$$q_F = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,28\,18\,28\,45\,90\,45\ldots \quad \text{de sorte que} \quad \log q_F = 1$$

et si F est un corps de fonctions de caractéristique p on note

$$q_F = q = p^f$$

le cardinal du corps $\mathbb{F}_q$ des constantes. On notera $\log_{q_F}$ le logarithme en base q_F. On notera C_F le groupe multiplicatif $F^\times$ si F est local et C_F sera le groupe des classes d'idèles $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ si F est global. Dans tous les cas le groupe

$$Q_F := C_F/(C_F)^2$$

est un groupe compact dont le dual de Pontryagin est le groupe (discret) des caractères d'ordre 2 de C_F. Les caractères du groupe Q_F sont en bijection, par la théorie du corps de classes, avec les extensions quadratiques séparables E/F (déployées si le caractère est trivial). Plus précisément, le groupe Q_F est d'ordre 1 si $F = \mathbb{C}$, d'ordre 2 si $F = \mathbb{R}$ et d'ordre 4 si F est local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2. Il est toujours fini si F est local de caractéristique $p \neq 2$ (par exemple il est d'ordre 8 pour $\mathbb{Q}_2$). C'est un groupe compact de cardinal non dénombrable si F est un corps local de caractéristique 2 ou si F est global.

Soit $R(X)$ un polynôme de la forme

$$R(X) = X^2 - \mathfrak{t}X + \mathfrak{d}$$

avec $\mathfrak{t} \in F$ et $\mathfrak{d} \in F^\times$. On suppose que $R(X)$ n'est pas un carré dans $F[X]$. Alors, la F-algèbre $E = F[X]/R(X)F[X]$ est semi-simple de dimension 2. Tout élément de E induit par multiplication un F-endomophisme de E. Notons τ l'image de X dans E alors l'ensemble $\{1, \tau\}$ est une base de E sur F. On obtient ainsi un plongement de E dans $M(2, F)$. L'endomorphisme induit par τ a pour matrice

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{d} \\ 1 & \mathfrak{t} \end{pmatrix} .$$

La matrice

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{t} & \mathfrak{d} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\boldsymbol{\tau} + \overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathfrak{t} = \operatorname{trace} \boldsymbol{\tau} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\tau}\overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathfrak{d} = \det \boldsymbol{\tau} = N_{E/F}(\tau)$$

où $N_{E/F}$ est la norme pour E/F.

On suppose désormais $\boldsymbol{\tau} \neq \overline{\boldsymbol{\tau}}$ (ce qui est toujours le cas sauf en caractéristique $p = 2$ où cela impose $\mathfrak{t} \neq 0$). L'extension E/F est alors séparable, éventuellement déployée (i.e.

$E = F \oplus F$). On notera $T_{E/F}$ le groupe algébrique des matrices de la forme $t = a + b\boldsymbol{\tau}$ avec $\det(t) \neq 0$. C'est un tore dans $GL(2)$. L'automorphisme $a + b\boldsymbol{\tau} \mapsto a + b\overline{\boldsymbol{\tau}}$ est induit par la conjugaison sous

$$\boldsymbol{w}_E = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{d} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On notera $\varepsilon_{E/F}$ le caractère d'ordre 2 de C_F associé à E par la théorie du corps de classes : c'est le générateur du groupe des caractère de $C_F/N_{E/F}C_E$. Il est non trivial si et seulement si E est un corps. On observe que $\mathfrak{d}$ est une norme et on a le

Lemme 1.1.1.

$$\varepsilon_{E/F}\big(\det(\boldsymbol{w}_E)\big) = \varepsilon_{E/F}(-1) .$$

On notera ψ un caractère non trivial du groupe additif F si F est local et de $\mathbb{A}_F/F$ si F est global. Lorsque F est local le scalaire $\lambda(E/F, \psi)$ est introduit par Langlands dans ses notes de Yale sur les facteurs ε. Il apparait lorsque l'on calcule la transformée de Fourier, au sens des distributions tempérées, de la fonction de E dans $\mathbb{C}$

$$x \mapsto \psi(x\overline{x}).$$

Formellement on a

$$\lambda(E/F, \psi) = vp \int_E \psi(x\overline{x})dx$$

où vp désigne la "valeur principale" de l'intégrale divergente. On aura besoin du

Lemme 1.1.2.

$$\lambda(E/F, \psi)^2 = \varepsilon_{E/F}(-1) .$$

Si ψ est non trivial sur $\mathfrak{p}^{-1}$ mais trivial sur $\mathfrak{O}_F$ et si E/F est non ramifié alors

$$\lambda(E/F, \psi) = 1 .$$

En particulier $\lambda(E/F, \psi)$ est une racine quatrième de l'unité. Pour une extension quadratique séparable de corps globaux E/F le produit sur toutes les places des facteurs $\lambda(E_v/F_v, \psi)$ où $E_v = E \otimes F_v$ vaut 1.

Démonstration. On renvoie au Lemme 1.1 de [JL] et à [W]. □

1.2. **Groupes et sous-groupes.** Comme dans [LL] on pose

$$G = SL(2) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{G} = GL(2) .$$

On note Z le centre de G et $\widetilde{Z}$ celui de $\widetilde{G}$. Le déterminant induit, après passage au quotient, un isomorphisme

$$G(F)\widetilde{Z}(F)\backslash\widetilde{G}(F) \to Q_F$$

si F est local et, si F est global, un isomorphisme

$$G(\mathbb{A}_F)\widetilde{G}(F)\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F) \to Q_F .$$

On note P le sous-groupe de Borel de G et $\widetilde{P}$ celui de $\widetilde{G}$ formés de matrices triangulaires supérieures, M le tore des matrices diagonales de G et $\widetilde{M}$ pour $\widetilde{G}$. On note U le radical unipotent de P et de $\widetilde{P}$. Le normalisateur de U dans G est P. Le radical unipotent U du sous-groupe de Borel P est l'union de deux sous-ensembles P-invariants à savoir $\{1\}$ et U' formé d'unipotents réguliers.

Pour $\gamma \in G(F)$ on note I_γ son centralisateur schématique. Les centralisateurs des éléments semi-simples sont lisses et connexes. On rappelle qu'un élément semi-simple $\gamma \in G(F)$ est dit elliptique si le centralisateur du tore déployé maximal A_γ du centre de I_γ est égal à G. Pour $G = SL(2)$ cela signifie que A_γ est trivial. Pour γ unipotent régulier le centralisateur I_γ est non connexe et non réduit en caractéristique 2. On observera que l'élément neutre est elliptique et unipotent.

On notera G_{ell} (resp. G_{par}) le sous-ensemble de $G(F)$ formé des éléments elliptiques (resp. non elliptiques).

1.3. **Compact maximal et décomposition d'Iwasawa.** Soit F un corps local. On munit l'espace vectoriel $F \oplus F$ de la norme euclidienne pour les corps archimédiens et de la norme "sup" pour les corps non archimédiens et on notera $||(x, y)||$ la norme du vecteur $(x, y) \in F \oplus F$. On note $\widetilde{K}$ le groupe d'isométrie de la norme sur $F \oplus F$. On a $\widetilde{K} = O(2, F)$ si $F = \mathbb{R}$, $\widetilde{K} = U(2)$ si $F = \mathbb{C}$ et $\widetilde{K} = GL(2, \mathfrak{O}_F)$ si F est non archimédien. C'est le compact maximal naturel de $\widetilde{G}(F)$ et $K = \widetilde{K} \cap G(F)$ est celui de $G(F)$. On dispose alors des décompositions d'Iwasawa $G(F) = M(F)U(F)K$ et $\widetilde{G}(F) = \widetilde{M}(F)U(F)K$.

Pour un groupe sur les adèles le compact maximal que nous utiliserons sera le produit sur toutes les places du compact naturel sur les corps locaux. Il sera encore noté K si il n'y a aucune ambiguïté et on a les décompositions d'Iwasawa globales $G(\mathbb{A}_F) = M(\mathbb{A}_F)U(\mathbb{A}_F)K$ et $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F) = \widetilde{M}(\mathbb{A}_F)U(\mathbb{A}_F)K$.

On note α la racine positive de M dans U et, pour $m \in M(\mathbb{A}_F)$, on pose

$$\mathbf{H}_P(m) = \log(|m^\alpha|^{1/2})/\log q_F = \log_{q_F}(|m^\alpha|^{1/2}) \ .$$

On a ainsi défini une application surjective

$$\mathbf{H}_P : M(\mathbb{A}_F) \to \mathfrak{a}_M$$

où $\mathfrak{a}_M \simeq \mathbb{R}$ si F est un corps de nombres et $\mathfrak{a}_M \simeq \mathbb{Z}$ pour les corps de fonctions. On prolonge $\mathbf{H}_P$ en une fonction

$$\mathbf{H}_P : G(\mathbb{A}_F) \to \mathfrak{a}_M$$

au moyen de la décomposition d'Iwasawa : si $x = muk$ est une telle décomposition on pose $\mathbf{H}_P(x) = \mathbf{H}_P(m)$.

Considérons les matrices

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \ .$$

Soit $wu_n = muk$ une décomposition d'Iwasawa pour wu_n. Donc $\mathbf{H}_P(wu_nk) = \mathbf{H}_P(m)$ et $(0, 1)wu_n = (1, n)$ mais

$$||(0, 1)muk|| = ||(0, 1)m|| = ||(0, a^{-1})||$$

puisque $k \in K$ est une isométrie et donc $||(1, n)|| = |a^{-1}|$. En résumé :

Lemme 1.3.1.

$$\mathbf{H}_P(wu_nk) = \mathbf{H}_P(m) = \log_{q_F} |a| = -\log_{q_F} \big(||(1,n)||\big) \ .$$

On dispose sur $G(\mathbb{A}_F)$, $U(\mathbb{A}_F)$ et sur les tores des mesures de Tamagawa. On pose

$$[G] =: G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F) \qquad [U] =: U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F) \ .$$

On a

$$\tau(G) = \mathrm{vol}\,[G] = 1 \qquad \text{et} \qquad \tau(U) = \mathrm{vol}\,[U] = 1 \ .$$

Lemme 1.3.2. *Pour un tore anisotrope T de G c'est-à-dire un groupe isomorphe au groupe $T_{E/F}$ des éléments de norme 1 dans une extension quadratique séparable E/F on a*

$$\tau(T) = \mathrm{vol}\,[T] = 2 \ .$$

Démonstration. En effet, d'après Ono

$$\tau(T) = \frac{\# H^1(\mathbb{A}_F/F, T)}{\# \ker^1(F,T)} \ .$$

On a la suite exacte

$$1 \to F^\times \to E^\times \to T(F) \to 1$$

où l'application $E^\times \to T(F)$ est $e \mapsto e/\overline{e}$. La dualité de Tate-Nakayama montre alors que

$$\# H^1(\mathbb{A}_F/F, T) = 2 \quad \text{et} \quad \# \ker^1(F,T) = 1 \ .$$

$\square$

Soit T un tore dans G. On note Δ_T la valeur absolue du “dénominateur de Weyl” pour $SL(2)$

$$\Delta_T(t) = \left|(t^{\alpha/2} - t^{-\alpha/2})\right| = |t^\alpha|^{1/2}|1 - t^{-\alpha}|$$

Soit w_T l'ordre du groupe de Weyl : $N_T(F)/T(F)$ où N_T le normalisateur de T. On a la formule d'intgration de Weyl :

Lemme 1.3.3. *Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty\big(G(F)\big)$*

$$\int_{G(F)} f(x)dx = \sum_T w_T^{-1} \int_{T(F)\backslash G(F)} \int_{T(F)} \Delta_T(t)^2 f(x^{-1}tx)\, dt\ d\dot{x}$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores T.

1.4. **Conjugaison stable.** Dans la littérature la conjugaison stable n'est définie que pour les éléments semi-simples d'un groupe réductif $H(F)$ pour F de caractéristique 0. Pour $x \in H(F)$ semi-simple on note I_x le sous-groupe engendré par H_x la composante neutre du centralisateur de x dans H et le centre Z de H : $I_x = H_x.Z$. On appelle I_x le centralisateur stable. On dit que x et $x' = yxy^{-1}$ avec x et x' dans $G(F)$ et $y \in G(F^{sep})$ sont stablement conjugués si le cocycle $a_\sigma = y\sigma(y)^{-1}$ prend ses valeurs dans I_x. L'orbite stable est paramétrée par l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^0(F, I_x \backslash H)$.

On notera $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et F^{sep} la clôture séparable de F dans $\overline{F}$. Pour $G = SL(2)$ deux éléments semi-simples x et x' de $G(F)$ sont dits stablement conjugués s'ils sont conjugués sur la clôture algébrique :

$$x' = yxy^{-1} \qquad \text{pour un} \qquad y \in G(\overline{F}) \ .$$

On observe que pour $x \in SL(2, F)$ le centralisateur stable I_x est le centralisateur. L'ensemble des points rationnels de l'orbite de x sous $G(\overline{F})$ est paramétré par l'ensemble de cohomologie plate (flat topology)

$$H^0_f(F, I_x \backslash G).$$

L'ensemble $C(x)$ des orbites par conjugaison sous $G(F)$ dans l'ensemble des points rationnels de l'orbite géométrique est paramétré par

$$C(x) \simeq \mathrm{Coker}[H^0_f(F, G) \to H^0_f(F, I_x \backslash G)] \simeq \ker[H^1_f(F, I_x) \to H^1_f(F, G)] \ .$$

Mais on sait que le H^1 de notre G est trivial on a donc ici

$$C(x) \simeq H^1_f(F, I_x) \ .$$

Supposons que x est semi-simple non central ; ses valeurs propres sont distinctes et engendrent une extension quadratique séparable E (éventuellement déployée). Il est élémentaire de voir que si x et x' sont stablement conjugués ils sont alors conjugués dans $G(E)$. Donc, pour les éléments semi-simples la conjugaison sur la clôture algébrique coïncide avec la conjugaison sur la clôture séparable. Maintenant pour $y \in G(F^{sep})$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(F^{sep}/F)$ on a aussi

$$x' = \sigma(y)x\sigma(y)^{-1} \qquad \text{et donc} \qquad a_\sigma = y\sigma(y)^{-1} \in I_x \ .$$

On a ainsi défini un élément du noyau du morphisme entre ensembles pointés en cohomologie étale

$$\ker[H^1_e(F, I_x) \to H^1_e(F, G)] = H^1_e(F, I_x)$$

puisque $H^1_e(F, G)$ est trivial. Le cocycle a_σ définit une classe $c(x)$ dans $H^1_e(F, I_x)$. Cet ensemble décrit donc l'ensemble des classes de conjugaison rationnelles dans la classe de conjugaison stable d'un élément semi-simple [1] . Maintenant on a l'inclusion de G dans $\widetilde{G}$; notons $\widetilde{I}_x$ le centralisateur de x dans $\widetilde{G}$. Puisque x est semi-simple $\widetilde{I}_x$ est un tore isomorphe à $E^\times$. La 1-cohomologie du tore $\widetilde{I}_x$ est triviale et donc le 1-cocycle a_σ définissant $c(x)$ est un 1-cobord à valeurs dans $\widetilde{I}_x$. Donc, quitte à modifier y par un élément de $\widetilde{I}_x$, on obtient un $y' \in \widetilde{G}(F^{sep})$ tel que $y'\sigma(y')^{-1} = 1$ et donc on a $y' \in \widetilde{G}(F)$ avec $x' = y'x(y')^{-1}$.

1. En fait ce résultat est sans surprise car il est connu que pour les groupes lisses et connexes la cohomologie plate coïncide avec la cohomologie étale.

On a ainsi montré que deux éléments semi-simples de $G(F)$ stablement conjugués sont conjugués sous $\widetilde{G}(F)$. En d'autres termes, dans $G(F)$ la conjugaison stable coïncide avec la conjugaison ordinaire sous $\widetilde{G}(F)$.

Soit $x \in G(F)$ semi-simple régulier. Son centralisateur dans G (resp $\widetilde{G}$) est un tore T (resp. $\widetilde{T}$). Il résulte des remarques ci-dessus que l'application naturelle

$$H^0_e(F, T\backslash G) \to H^0_e(F, \widetilde{T}\backslash\widetilde{G}) \simeq \widetilde{T}(F)\backslash\widetilde{G}(F)$$

induite par l'inclusion $G \subset \widetilde{G}$ est un isomorphisme qui sera utilisé systématiquement dans la suite pour la définition et le calcul des intégrales κ-orbitales.

Distributions stablement invariantes. Soit F un corps local. On dit qu'une distribution sur $G(F)$ est invariante si elle est invariante par conjugaison et qu'elle est stablement invariante si elle est invariante par conjugaison stable. Dans notre cas cela se réduit à demander l'invariance par conjugaison sous $\widetilde{G}(F)$ dans le cas local. Dans le cas d'un corps global une distribution adélique stablement invariante est une distribution stablement invariante localement partout.

1.5. **Données endoscopiques.** Nous ne ferons pas ici la théorie de l'endoscopie en général et nous nous contenterons du cas $G = SL(2)$. Une donnée endoscopique est un couple $\mathcal{E} = \{H_{\mathcal{E}}, \kappa_{\mathcal{E}}\}$ où $H_{\mathcal{E}}$ est un groupe réductif qui ici sera soit G soit un tore T de G, et $\kappa_{\mathcal{E}}$ un caractère de $G(F)\widetilde{Z}(F)\backslash\widetilde{G}(F)$ si F est local ou de $G(\mathbb{A}_F)\widetilde{G}(F)\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ si F est global. Un tel caractère, qui peut être vu comme un caractère de Q_F, est nécessairement d'ordre 2. Les classes d'équivalence de données endoscopiques pour G sont de deux types
Type 1 : $\mathcal{E} = \{SL(2), 1\}$
Type 2 : $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$ où E/F est un extension quadratique séparable, déployée ou non, et $T_{E/F}$ le sous groupe des éléments de norme 1 dans $E^\times$.

2. Endoscopie géométrique locale

2.1. **Stabilisation et transfert géométrique local.** Soient F un corps local et $f \in \mathcal{C}_c^\infty\big(G(F)\big)$. Soit T un tore dans $G = SL(2)$ et soit $t \in T(F)$ régulier ; son centralisateur est $T(F)$. L'intégrale orbitale $\mathcal{O}(t,f)$ de $t \in T(F)$ est, par définition, l'intégrale

$$\mathcal{O}(t,f) = \int_{T(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}tx)dx \ .$$

On note E l'extension quadratique séparable (éventuellement déployée) définie par t et T est isomorphe à $T_{E/F}$, le sous-groupe des éléments de norme 1 dans

$$E^\times = \widetilde{T}_{E/F}(F) \ .$$

On note $\varepsilon_{E/F}$ le caractère de $F^\times$ associé à l'extension quadratique E/F par la théorie du corps de classe. Si E est un corps c'est le caractère non trivial du groupe $N_{E/F}E^\times\backslash F^\times$ qui est d'ordre 2. C'est le caractère trivial si $E = F \oplus F$.

Soit κ un caractère du groupe compact

$$\widetilde{Z}(F)G(F)\backslash\widetilde{G}(F) \simeq Q_F = (F^\times)^2\backslash F^\times \ .$$

On s'intéresse aux intégrales du type

$$\int_{\widetilde{Z}(F)T(F)\backslash\widetilde{G}(F)} \kappa(\det \widetilde{x}) f(\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x})d\widetilde{x}$$

On observe que

$$\widetilde{x} \mapsto f(\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x})$$

est invariant à gauche par le centralisateur $\widetilde{T}(F)$ de t dans $\widetilde{G}(F)$ et donc une telle intégrale est nulle sauf si κ est trivial sur $\widetilde{T}(F)$ ce qui impose $\kappa = 1$ ou $\kappa = \varepsilon_{E/F}$ et on pose

$$\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \int_{H_e^0(F,T\backslash G)} \kappa(\det \widetilde{x}) f(\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x})d\widetilde{x} = \int_{\widetilde{T}(F)\backslash\widetilde{G}(F)} \kappa(\det \widetilde{x}) f(\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x})d\widetilde{x} \ .$$

L'inclusion

$$T(F)\backslash G(F) \subset \widetilde{T}(F)\backslash\widetilde{G}(F)$$

munit $\widetilde{T}(F)\backslash\widetilde{G}(F)$ d'une mesure invariante à droite et c'est celle qui est utilisée pour calculer l'intégrale. Si E est un corps, c'est-à-dire si $\varepsilon_{E/F} \neq 1$ on a

$$\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \mathcal{O}(t,f) + \kappa(\det \widetilde{x})\mathcal{O}(t',f) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(t,f) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{O}^1(t,f) + \mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(t,f)\Big)$$

où $t' = \widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x}$ et t' est stablement conjugué mais non conjugué à t. Par contre dans le cas où $E = F \oplus F$ on a $\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \mathcal{O}(t,f)$. L'intégrale $\mathcal{O}^1(t,f)$ est appelée intégrale orbitale stable.

Transfert principal. Lorsque $\mathcal{E} = \{SL(2), 1\}$ le transfert est simplement l'identité

$$f^{\mathcal{E}} = f$$

Dans la suite de ce paragraphe $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$. On choisit un isomorphisme entre $\widetilde{T}(F)$ et $E^\times$ c'est-à-dire une diagonalisation simultanée de tous les éléments de $\widetilde{T}(F)$. On a alors un isomorphisme entre $T(F)$ et le tore $T_{E/F}(F)$ des éléments de norme 1 dans $E^\times$; on note t' l'image de $t \in T(F)$ par cet isomorphisme. On fixe un élément régulier $\boldsymbol{\tau}$ dans $\widetilde{T}(F)$. On note γ et $\overline{\gamma}$ les valeurs propres de t' (resp. τ et $\overline{\tau}$ les valeurs propres de $\boldsymbol{\tau}$).

Definition 2.1.1. *Lorsque $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$ le facteur de transfert est l'expression suivante*

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t, t') = \underline{c}\,\varepsilon_{E/F}\Big(\frac{\gamma - \overline{\gamma}}{\tau - \overline{\tau}}\Big)|\gamma - \overline{\gamma}|$$

où $\underline{c}$ est une constante.

Une variante consiste à écrire

$$t' = a + b\tau \in E^\times \simeq \widetilde{T}_{E/F}(F)$$

avec a et b dans F et on a alors

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t, t') = \underline{c}\,\varepsilon_{E/F}(b)|b(\tau - \overline{\tau})|_E \ .$$

Dans la suite nous prendrons

$$\underline{c} = \lambda(E/F, \psi)^{-1}$$

ce qui est l'inverse du choix fait dans [LL]. Nous verrons plus loin (3.5.2) que le choix fait ici semble plus naturel. On posera

$$\mathcal{O}^{\mathcal{E}}(t', f) = \Delta^{\mathcal{E}}(t, t')\mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(t, f) \ .$$

Remarque 2.1.2. Les intégrales κ-orbitales $\mathcal{O}^\kappa(t, f)$ se prêtent à une pré-stabilisation : elles permettent d'écrire les intégrales orbitales comme des sommes d'intégrales faisant intervenir les classes de conjugaison stable. Le produit avec le facteur de transfert fournit des expressions $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}(t', f)$ qui sont constantes sur les classes de conjugaison stable. Nous allons maintenant voir que, de plus, elles se prêtent au transfert endoscopique.

Nous allons montrer qu'il existe une fonction

$$f^{\mathcal{E}} \in \mathcal{C}_c^\infty\big(H_{\mathcal{E}}(F)\big)$$

appelée transfert de f pour la donnée endoscopique $\mathcal{E}$ telle que, pour t régulier, on ait

$$f^{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(t, f) \ .$$

On observera que la définition du transfert dépend du choix des mesures de Haar utilisées pour calculer les intégrales orbitales. Nous distinguons les différents cas.

2.2. **Transfert déployé.** Soit $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$ avec $E = F \oplus F$ et $\varepsilon_{E/F} = 1$. Alors $T_{E/F}$ est un tore déployé et à conjugaison près on peut supposer que $T_{E/F}$ est le tore diagonal M.

Lemme 2.2.1. *La fonction $t \mapsto \Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}(f,t)$ définie pour $t \in M(F) - Z(F)$ se prolonge en une fonction $f^{\mathcal{E}}$ lisse sur $T_{E/F}(F) \simeq M(F)$. Plus précisément, si*

$$t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in M(F)$$

alors

$$f^{\mathcal{E}}(t) = \int_K \int_F f\Big(k^{-1} \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k\Big) dn\, dk \ .$$

Démonstration. Le facteur de transfert vaut $\Delta^{\mathcal{E}}(t,t) = |a - a^{-1}|$. On a donc

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}(f,t) = |a - a^{-1}| \int_K \int_{U(F)} f\Big(k^{-1}u^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} uk\Big) du\, dk$$

soit encore

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}(f,t) = \int_K \int_F f\Big(k^{-1} \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k\Big) dn\, dk \ .$$

□

On observera que pour $\boldsymbol{z} \in Z(F)$ (où $\boldsymbol{z} = z.\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}$ est la matrice unité)

$$f^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{z}) = \mathcal{O}^1(\boldsymbol{z\nu}, f)$$

où

$$\mathcal{O}^1(\boldsymbol{z\nu}, f) = \int_K \int_{U(F)} f\Big(k^{-1} \begin{pmatrix} z & n \\ 0 & z \end{pmatrix} k\Big)\, dn\, dk \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Corollaire 2.2.2. *Si F est non archimédien, si f la fonction caractéristique de K et si dn et dk sont les mesures canoniques (volume 1 pour les entiers de F et volume 1 pour K), alors $f^{\mathcal{E}}$ est la fonction caractéristique du sous-groupe $\mathfrak{O}_F^\times$ des unités de $F^\times$.*

2.3. **Transfert elliptique.** Soit F un corps local. Soit E un corps extension quadratique séparable de F. Le groupe $E^\times$ des éléments inversibles est un tore elliptique $\widetilde{T}_{E/F}(F)$ que l'on suppose plongé dans $\widetilde{G}(F)$ comme dans 1.1 :

$$E^\times = \widetilde{T}_{E/F}(F) \subset \widetilde{G}(F) \simeq GL(E) \ .$$

On note E^1 le sous groupe des éléments de norme 1 c'est-à-dire $E^\times \cap G(F)$ et on posera $E^\star = E^1 - \{\pm 1\}$. On pourra observer que l'on a une bijection naturelle

$$E^1 \backslash G(F) \cup E^1 \backslash G(F)\eta \to E^\times \backslash \widetilde{G}(F)$$

où η vérifie $\varepsilon_{E/F}(\det(\eta)) = -1$.

On note A_+ le semi-groupe des matrices

$$\alpha(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $|\mu| \geq 1$.

Proposition 2.3.1. *Tout $g \in \widetilde{G}(F)$ s'écrit $g = e\alpha(\mu)k$ avec $e \in \widetilde{T}_{E/F}(F) = E^\times$, $k \in K$ et $|\mu| \geq 1$:*

$$\widetilde{G}(F) = \widetilde{T}_{E/F}(F)A_+K \ .$$

Soient $d\mu$ la mesure de Haar standard pour le groupe $F^\times$ et dk la mesure normalisée pour K. Pour $e \in E^\star$ on a la formule d'intégration

$$\int_{E^\times\backslash\widetilde{G}(F)} f(\widetilde{x}^{-1}e\widetilde{x})\, d\widetilde{x} = \int_K \int_{|\mu|\geq 1} f(k^{-1}\alpha(\mu)^{-1}e\alpha(\mu)k)C(\mu)\, d\mu\, dk$$

où $C(\mu) = |\mu - \mu^{-1}|$ pour $|\mu| \geq 1$ si $F = \mathbb{R}$ pour un choix convenable de la mesure de Haar sur $G(\mathbb{R})$. Si F non archimédien et E/F ramifié on a si $|\mu| \geq 1$

$$C(\mu) = 2q^m = 2|\mu| \ .$$

Si E/F est non ramifié $C(\mu) = 1$ si $|\mu| = 1$ et

$$C(\mu) = \left(1 + \frac{1}{q}\right)q^m = \left(1 + \frac{1}{q}\right)|\mu| \quad \textit{pour} \quad |\mu| > 1 \ .$$

Démonstration. Si $F = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{C}$ la décomposition de Cartan peut s'écrire

$$\widetilde{G}(F) = \mathbb{C}^\times A_+K$$

où $K = SO(2, \mathbb{R})$. La formule d'intégration

$$\int_{\widetilde{G}(F)} \varphi(x)\, dx = \int_{(\widetilde{k}_1,k_2)\in\widetilde{K}\times K} \int_{|\mu|\geq 1} \varphi(\widetilde{k}_1\alpha(\mu)k_2)C(\mu)\, d\widetilde{k}_1\, dk_2\, d\mu$$

est classique (voir par exemple [H, Chap. X, Proposition 1.17]). Ceci conclut la preuve lorsque $F = \mathbb{R}$. Soit maintenant F un corps local non archimédien. On observera que la mesure invariante sur $E^\times\backslash\widetilde{G}(F)$ est déterminée par le choix de mesures de Haar donnant la masse 1 au quotient $E^1\backslash K$ qui est un ouvert de $E^\times\backslash\widetilde{G}(F)$. L'argument ci-dessous (déjà utilisé dans [LL]) est emprunté à la démonstration du Lemme 7.3.2 de [JL]. L'anneau $\mathfrak{O}_E$ des entiers de E est un $\mathfrak{O}_F$-module libre de rang 2 ; on choisit $\tau \in \mathfrak{O}_E$ tel que

$$\mathfrak{O}_E = \mathfrak{O}_F \oplus \mathfrak{O}_F\tau \ .$$

En particulier $\{1, \tau\}$ est une base de E vu comme F-espace vectoriel. On note $\widetilde{K}$ le sous-groupe compact maximal

$$\widetilde{K} = GL(\mathfrak{O}_E) \subset GL(E) \simeq GL(2, F) \ .$$

On note $\mathfrak{M}$ l'ensemble des $\mathfrak{O}_F$-modules $\mathfrak{m}$ de type fini dans E et qui l'engendrent comme espace vectoriel sur F. En d'autres termes $\mathfrak{m}$ contient une F-base de E. Maintenant $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont dits equivalents s'il existe $e \in E^\times$ tel que $\mathfrak{m}' = e\mathfrak{m}$. On observe que tout $g \in \widetilde{G}(F)$ définit un module $\mathfrak{m} = g\mathfrak{O}_E \in \mathfrak{M}$ et ils sont tous de cette forme. De plus, $\mathfrak{m} = g\mathfrak{O}_E$ et $\mathfrak{m}' = g'\mathfrak{O}_E$ sont équivalents si et seulement si

$$g' = eg\widetilde{k} \qquad \text{avec} \qquad e \in \widetilde{T}_{E/F}(F) = E^\times \qquad \text{et} \qquad \widetilde{k} \in \widetilde{K} = \widetilde{G}(\mathfrak{O}_F) \ .$$

Donc les classes d'équivalences dans $\mathfrak{M}$ sont en bijection avec l'ensemble des doubles classes
$$\widetilde{T}_{E/F}(F)\backslash\widetilde{G}(F)/\widetilde{K}\ .$$
Un $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$ qui est de plus un sous-anneau de $\mathfrak{O}_E$ est appelé un "ordre". La classe d'équivalence de $\mathfrak{m}$ contient un unique "ordre" $\mathfrak{a}$:
$$\mathfrak{a}=\{a\in\mathfrak{O}_E\,|\,a\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}\}\ .$$
On a donc une bijection entre l'ensemble des "ordres" et l'ensemble des doubles classes. Maintenant un "ordre" $\mathfrak{a}$ admet une base de la forme $(1,\delta)$:
$$\mathfrak{a}=\mathfrak{O}_F\oplus\delta\mathfrak{O}_F\qquad\text{où}\qquad\delta=\varpi_F^m\tau$$
et où $m\in\mathbb{N}$ est uniquement déterminé. Donc $\mathfrak{a}=\varpi_F^m\alpha(\varpi_F^{-m})\mathfrak{O}_E$. On a ainsi montré que chaque double classe
$$\widetilde{T}_{E/F}(F)\backslash\widetilde{G}(F)/\widetilde{K}$$
contient un unique élément de la forme $\alpha(\varpi_F^{-m})$ et on remarque que
$$\widetilde{k}=\begin{pmatrix}\eta&0\\0&1\end{pmatrix}k$$
avec $k\in K$ et $|\eta|=1$. Reste à calculer $C(\mu)$. On écrira $\widetilde{T}$ pour $\widetilde{T}_{E/F}$ et on pose
$$\widetilde{T}(F,\mu):=\alpha(\mu)^{-1}\widetilde{T}(F)\alpha(\mu)\ .$$
On a alors
$$C(\mu)=\text{card}\left\{\widetilde{T}(F)\alpha(\mu)\widetilde{K}/\widetilde{Z}(F)\widetilde{K}\right\}=\text{card}\left\{\widetilde{T}(F,\mu)/\widetilde{T}(F,\mu)\cap\widetilde{Z}(F)\widetilde{K}\right\}\ .$$
On observe que
$$\widetilde{T}(F,\mu)\cap\widetilde{Z}(F)K=\left\{g=\alpha\widetilde{k}\quad\text{où}\quad\alpha\in F^\times\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}a&-b\mu^{-1}\mathfrak{d}\\b\mu&a+b\mathfrak{t}\end{pmatrix}\in\widetilde{K}\right\}$$
ce qui impose
$$a\in\mathfrak{O}_F\quad,\quad b\mu\in\mathfrak{O}_F\quad\text{et}\quad a^2+ab\mathfrak{t}+b^2\mathfrak{d}\in\mathfrak{O}_F^\times\ .$$
On pose $E(\mu)=1+\mu^{-1}\mathfrak{O}_E$. Comme $b\in\mu^{-1}\mathfrak{O}_F=\mathfrak{p}_F^m$ avec $m>1$ si $|\mu|>1$ alors a est une unité et on peut donc choisir α de sorte que $a=1$. Il en résulte que $C(\mu)$ est l'ordre du quotient $E^\times/F^\times E(\mu)$. Supposons tout d'abord E/F non ramifié. Dans ce cas
$$F^\times\simeq\mathfrak{O}_F^\times\times\varpi_F^{\mathbb{Z}}\quad\text{et}\quad E^\times\simeq\mathfrak{O}_E^\times\times\varpi_F^{\mathbb{Z}}\ .$$
Comme $\widetilde{T}(F)\simeq E^\times$ et $\widetilde{Z}(F)\simeq F^\times$ le cas $|\mu|=1$ est clair. Supposons désormais que $|\mu|>1$. Comme E/F est non ramifié $E(\mu)=1+\mathfrak{p}_E^m$ et donc
$$C(\mu)=\text{card}\left(\mathfrak{O}_E^\times/\mathfrak{O}_F^\times E(\mu)\right)=\frac{\text{card}\left(\mathfrak{O}_E^\times/E(\mu)\right)}{\text{card}\left(\mathfrak{O}_F^\times/\mathfrak{O}_F^\times\cap E(\mu)\right)}=\frac{(q^2-1)q^{2(m-1)}}{(q-1)q^{(m-1)}}$$
soit encore
$$C(\mu)=\left(1+\frac{1}{q}\right)q^m=\left(1+\frac{1}{q}\right)|\mu|\ .$$

Si E/F est ramifié $\varpi_F\mathfrak{O}_E = \varpi_E^2\mathfrak{O}_E$ et $E(\mu) = 1 + \mathfrak{p}_E^{2m}$ si $|\mu| = q^m$ et $m > 0$. Donc

$$C(\mu) = \frac{\mathrm{card}\,(\varpi_E^{\mathbb{Z}}\mathfrak{O}_E/\varpi_F^{\mathbb{Z}}\mathfrak{O}_E)\,\mathrm{card}\,\big(\mathfrak{O}_E^\times/E(\mu)\big)}{\mathrm{card}\,\big(\mathfrak{O}_F^\times/\mathfrak{O}_F^\times \cap E(\mu)\big)} = \frac{2(q-1)q^{(2m-1)}}{(q-1)q^{(m-1)}} = 2q^m = 2|\mu| \ .$$

□

Proposition 2.3.2. *Il existe une fonction lisse $f^{\mathcal{E}}$ sur $H_{\mathcal{E}}(F) = T_{E/F}(F)$ vérifiant*

$$f^{\mathcal{E}}(t) = \Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}^\kappa(t,f)$$

avec $\kappa = \varepsilon_{E/F}$ lorsque $t \in T_{E/F}(F)$ est régulier. Pour $\boldsymbol{z} \in Z(F)$ (où $\boldsymbol{z} = z.\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}$ est la matrice unité)

$$f^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{z}) = \mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{z\nu}, f)$$

où

$$\mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{z\nu}, f) = \int_K\int_U \kappa(n) f\Big(k^{-1}\begin{pmatrix} z & n \\ 0 & z\end{pmatrix}k\Big)\,dn\,dk \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \ .$$

Démonstration. Nous reproduisons la preuve donnée dans [LL, Lemma 2.1] valable en toute caractéristique. Un élément $t \in T_{E/F}(F)$ s'écrit sous la forme $t = a + b\tau$ et donc

$$t = \begin{pmatrix} a & -b\mathfrak{d} \\ b & a + b\mathfrak{t}\end{pmatrix}$$

Maintenant, si

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$$

un calcul élémentaire montre que

$$\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x} = \frac{1}{\det(\widetilde{x})}\begin{pmatrix} \star & -bN_{E/F}(b_1 + d_1\tau) \\ bN_{E/F}(a_1 + c_1\tau) & \star\end{pmatrix}$$

En posant

$$\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$$

on a

$$c_2 = \frac{bN_{E/F}(a_1 + c_1\tau)}{\det(\widetilde{x})} \qquad \text{et} \qquad b_2 = \frac{-bN_{E/F}(b_1 + d_1\tau)}{\det(\widetilde{x})} \ .$$

On en déduit que

$$\kappa(c_2) = \kappa(-b_2) = \kappa(\det\widetilde{x})\kappa(b) \ .$$

Par ailleurs, si $\widetilde{x} = e\alpha(\mu)k$ avec $e \in \widetilde{T}_{E/F}(F)$, $\alpha(\mu) \in A_+$ et $k \in K$ on a aussi

$$\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x} = k^{-1}\begin{pmatrix} a & -\mu^{-1}b\mathfrak{d} \\ \mu b & a + b\mathfrak{t}\end{pmatrix}k \ .$$

Nous allons évaluer l'intégrale

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \lambda(E/F,\psi)^{-1}\int_{\widetilde{Z}(F)T(F)\backslash\widetilde{G}(F)} D(b)\kappa(c_2)f(\widetilde{x}^{-1}t\widetilde{x})d\widetilde{x}$$

où $D(b) = |b(\tau - \overline{\tau})|_E$. Compte tenu de la décomposition :

$$\widetilde{G}(F) = \widetilde{T}_{E/F}(F)A_+\widetilde{K}$$

établie en 2.3.1 on a

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \lambda(E/F,\psi)^{-1}\,A$$

où

$$A = \int_K \int_{|\mu|\geq 1} D(b)C(\mu)\kappa(b\mu^{-1}) f\Big(k^{-1}\begin{pmatrix} a & -b\mu^{-1}\mathfrak{d} \\ b\mu & a+b\mathfrak{t}\end{pmatrix} k\Big)\, d\mu\, dk\ .$$

Si t tend vers $\boldsymbol{z}$ dans $T(F)$ alors a tend vers $z \in \boldsymbol{\mu}_2(F)$ et b tend vers 0. Maintenant il existe une fonction lisse sur $F^2 \times K$:

$$\varepsilon : (a,b,\mu,k) \mapsto \varepsilon(a,b,\mu,k)$$

qui tend vers zéro avec b uniformément pour $|\mu| \geq 1$ et $k \in K$ telle que, si $b\mu$ est borné (ce qui est loisible puisque f est à support compact), on ait

$$f\Big(k^{-1}\begin{pmatrix} a & -b\mu^{-1}\mathfrak{d} \\ b\mu & a+b\mathfrak{t}\end{pmatrix} k\Big) = \big(1+\varepsilon(a,b,\mu,k)\big) f\Big(k^{-1}\begin{pmatrix} z & 0 \\ u & z\end{pmatrix} k\Big)$$

avec $u = b\mu$. Pour un corps non archimédien on peut prendre $\varepsilon(a,b,\mu,k) = 0$ si b est assez petit. Enfin on utilise que $\boldsymbol{\nu}$ est conjugué sous K de son transposé inverse.

$\square$

La combinaison de 2.2.1 et de 2.3.2 fournit le

Théorème 2.3.3. *Soit $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$ où E/F est une extension quadratique séparable (déployée ou non). On a plongé $T_{E/F}$ dans G. La fonction $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}(t,f)$ définie pour $t \in T_{E/F}(F) - Z(F)$, c'est-à-dire pour t régulier, se prolonge en une fonction lisse $f^{\mathcal{E}}$ sur le groupe compact $T_{E/F}(F)$.*

On dispose d'une forme plus précise dans le cas particulier où tout est non ramifié et où f est la fonction caractéristique de K. C'est le résultat désormais connu sous le nom de “Lemme Fondamental”. On suppose les mesures de Haar normalisées de sorte que $d\mu$ donne la mesure 1 à $\mathfrak{O}_F^\times$ et dk la mesure 1 à K.

Théorème 2.3.4. *Supposons F non archimédien, E/F non ramifié et que f est la fonction caractéristique de $K = SL(2,\mathfrak{O}_E)$. Si la constante c du facteur transfert vaut 1 alors*

$$t \mapsto f^{\mathcal{E}}(t) = \Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}^\kappa(t,f)$$

est la fonction caractéristique de $T_{E/F}(\mathfrak{O}_F) = \mathfrak{O}_E^1$ le sous-groupe des éléments de norme 1 dans $\mathfrak{O}_E^\times$.

Démonstration. Si $E = F \oplus F$ c'est le corollaire 2.2.2. Supposons maintenant que E est un corps. Pour $t = a + b\tau$ on a

$$f^{\mathcal{E}}(t) = \Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \int_{|\mu|\geq 1} D(b)C(\mu)\kappa(b\mu) f\Big(\begin{pmatrix} a & -b\mu^{-1}\mathfrak{d} \\ b\mu & a+b\mathfrak{t}\end{pmatrix}\Big)\, d\mu\ .$$

On rappelle que puisque E/F est non ramifié on a choisi $\tau \in \mathfrak{O}_E^\times$ de sorte que $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{t}$ sont des entiers et

$$D(b) = |b(\tau - \overline{\tau})| = |b| \ .$$

On a donc

$$f^{\mathcal{E}}(a + b\tau) = 0$$

sauf si $a \in \mathfrak{O}_F$ et $b\mu \in \mathfrak{O}_F$ auquel cas,

$$f^{\mathcal{E}}(a + b\tau) = \int_{|b| \leq |b\mu| \leq 1} |b| C(\mu) \kappa(b\mu) \, d\mu \ .$$

On rappelle que $d\mu$ donne la mesure 1 à $\mathfrak{O}_F^\times$, que

$$|b|C(\mu) = |b| \quad \text{si} \quad |\mu| = 1 \quad \text{et} \quad |b|C(\mu) = \left(1 + \frac{1}{q}\right)|b\mu| \quad \text{si} \quad |\mu| > 1 \ .$$

De plus $\kappa(b\mu) = (-1)^m$ si $|b\mu| = q^{-m}$. Donc si $a \in \mathfrak{O}_F$ et $|b| = q^{-n} \leq 1$

$$f^{\mathcal{E}}(a + b\tau) = (-1)^n q^{-n} + \sum_{0 \leq m < n} (-1)^m \left(1 + \frac{1}{q}\right) q^{-m} = 1 \ .$$

□

Sous les hypothèses de ce lemme mais avec des mesures de Haar différentes pour G et $T_{E/F}$ on obtient comme transfert la fonction caractéristique du compact maximal de $T_{E/F}(F)$ multipliée par $\mathrm{vol}\big(T_{E/F}(\mathfrak{O}_F)\big) \backslash \mathrm{vol}\big(G(\mathfrak{O}_F)\big)$:

Corollaire 2.3.5.

$$f^{\mathcal{E}}(t) = \frac{\mathrm{vol}\big(G(\mathfrak{O}_F)\big)}{\mathrm{vol}\big(T_{E/F}(\mathfrak{O}_F)\big)} \chi_{E/F}(t)$$

où $\chi_{E/F}$ est la fonction caractéristique de $T_{E/F}(\mathfrak{O}_F)$.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.6. *Soit F un corps local, $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$ une donnée endoscopique de type 2 et t un élément de $T_{E/F}(F)$. On a*

$$f^{\mathcal{E}}(t^{-1}) = f^{\mathcal{E}}(t) \ .$$

Démonstration. On a exhibé en 1.1.1 un élément $w \in \widetilde{G}(F)$ qui vérifie

$$wtw^{-1} = t^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{E/F}\big(\det(w)\big) = \varepsilon_{E/F}(-1) \ .$$

On en déduit que

$$\mathcal{O}^\kappa(t^{-1}, f) = \varepsilon_{E/F}(-1)\mathcal{O}^\kappa(t, f)$$

et comme par ailleurs

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t^{-1}, t^{-1}) = \varepsilon_{E/F}(-1)\Delta^{\mathcal{E}}(t, t)$$

le lemme en résulte. □

2.4. **Développement en germes pour $SL(2)$.**

La problématique. Dans toute cette section F désigne un corps local de caractéristique $p \geq 0$. On note $\mathcal{U}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison d'unipotents réguliers. Cet ensemble est isomorphe au groupe $F^\times/(F^\times)^2$. On a donc

$$\mathcal{U} \simeq Q_F \simeq G(F)\widetilde{Z}(F)\backslash\widetilde{G}(F) \ .$$

Un tel isomorphisme est bien entendu très particulier au groupe $SL(2)$.

Soit T un tore anisotrope de G. On considère $t \in T(F)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty\big(G(F)\big)$. On cherche un développement asymptotique de l'intégrale orbitale $\mathcal{O}(t,f)$ lorsque $t \to 1$. En caractéristique $p = 0$ on dispose du développement en germes de Shalika indexé par l'ensemble des classes de conjugaison unipotentes rationnelles. En caractéristique 2 l'ensemble $\mathcal{U}$ des classes de conjugaison unipotentes rationnelles régulières est paramétré par un groupe compact de cardinal non dénombrable. Le développement en germes de Shalika pour $SL(2)$ ne peut pas être défini *stricto sensu* et les sommes sur $\mathcal{U}$ doivent être remplacées par des intégrales si $p = 2$. On dispose d'un développement en κ-germes qui lui a un sens en toute caractéristique et qui en caractéristique $p \neq 2$ est équivalent, modulo une transformation de Fourier sur un groupe fini, au développement en germes de Shalika.

Le cas $p \neq 2$. Lorsque $p \neq 2$ le groupe $\mathcal{U}$ est fini et on a le développement en germes de Shalika

$$\mathcal{O}(t,f) = \Gamma_1(t)f(1) + \sum_{\eta\in\mathcal{U}} \Gamma_\eta(t)\mathcal{O}(\eta,f) \ .$$

On dispose des intégrales κ-orbitales unipotentes

$$\mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{\nu},f) \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

c'est à dire l'intégrale sur $\widetilde{G}(F)/U(F)\widetilde{Z}(F)$ tordue par κ. On a par inversion de Fourier

$$\mathcal{O}(\eta,f) = \frac{1}{\operatorname{card}\widehat{\mathcal{U}}} \sum_{\kappa\in\widehat{\mathcal{U}}} <\kappa,\eta>\mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{\nu},f)$$

où κ parcourt le dual $\widehat{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$. Le développement de Shalika peut donc se récrire

$$\mathcal{O}(t,f) = \Gamma_1(t)f(1) + \frac{1}{\operatorname{card}\widehat{\mathcal{U}}} \sum_{\eta\in\mathcal{U}}\sum_{\kappa\in\widehat{\mathcal{U}}} <\kappa,\eta>\Gamma_\eta(t)\mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{\nu},f) \ .$$

Il est alors naturel d'introduire les κ-germes :

$$\Gamma^\kappa(\boldsymbol{\nu},t) := \frac{1}{\operatorname{card}\mathcal{U}} \sum_{\eta\in\mathcal{U}} <\kappa,\eta>\Gamma_\eta(t)$$

et on a alors un développement en κ-germes

$$\mathcal{O}(t,f) = \Gamma_1(t)f(1) + \sum_{\kappa\in\widehat{\mathcal{U}}} \Gamma^\kappa(\boldsymbol{\nu},t)\mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{\nu},f) \ .$$

Un tel développement en κ-germes existe aussi en caractéristique $p = 2$. C'est l'objet de la section suivante.

Cas général. On va utiliser la stabilisation de l'intégrale orbitale de $t \in T(F)$ pour donner un développement asymptotique de l'intégrale orbitale $\mathcal{O}(t,f)$ au voisinage de 1 en toute caractéristique. On a

$$\mathcal{O}(t,f) = c_1 \sum_{\kappa \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{O}^\kappa(t,f)$$

et $\mathcal{O}^\kappa(t,f)$ est nul sauf si $\kappa = 1$ ou bien si $\kappa = \varepsilon_{E/F}$ est le caractère attaché par la théorie du corps de classe à l'extension quadratique E engendrée par un plongement de $T(F)$ dans $M(2,F)$.

Pour $\kappa = 1$ l'intégrale $\mathcal{O}^1(t,f)$ est l'intégrale orbitale pour un élément d'un tore elliptique dans $GL(2,F)$ pour lequel on dispose des germes de Shalika :

$$\mathcal{O}^1(t,f) = \Gamma_1^{\widetilde{G}}(t) f(1) + \Gamma_{\boldsymbol{\nu}}^{\widetilde{G}}(t) \mathcal{O}_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{\nu}, f) \ .$$

On observera que l'intégrale orbitale sur $GL(2,F)$ a un sens bien que f ne soit définie que sur $SL(2,F)$ car les conjugués sous $GL(2)$ des éléments de $SL(2)$ restent dans ce groupe.

Maintenant, si $\kappa = \varepsilon_{E/F}$,

$$\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \Delta^{\mathcal{E}}(t,t')^{-1} f^{\mathcal{E}}(t')$$

et

$$f^{\mathcal{E}}(t') = f^{\mathcal{E}}(1)$$

si t' est assez voisin de 1. Le germe $\Gamma^\kappa(t)$ est donné par l'inverse du facteur de transfert. On pourra observer qu'il existe une constante c_2 dépendant du choix des mesures telle que

$$f^{\mathcal{E}}(1) = c_2 \, \mathcal{O}^\kappa(\boldsymbol{\nu}, f) \ .$$

3. Analyse harmonique et transfert spectral local

3.1. **Séries principales.** On appelle séries principales les représentations induites paraboliques à partir d'un caractère unitaire λ du sous-groupe de Levi $M(F)$ prolongé à $P(F)$ trivialement sur $U(F)$. Elles sont réalisées par la représentation régulière droite dans l'espace V_λ des fonctions

$$\varphi(pg) = p^\lambda \delta_P(p)^{1/2}\varphi(g) \quad \text{où} \quad \delta_P\Big(\begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\Big) = |a|^2 \ .$$

On la notera π_λ. De même un caractère unitaire $\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{P}(F)$:

$$p = \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & b\end{pmatrix} \mapsto p^{\widetilde{\lambda}} = \mu(a)\nu(b)$$

définit une série principale $\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}}$, également notée $\pi(\mu,\nu)$, pour $\widetilde{G}(F)$. La notation $\pi(\mu,\nu)$ est celle de [JL] où il est montré que ces représentations sont unitaires irréductibles, que $\pi(\mu,\nu)$ est équivalente à $\pi(\nu,\mu)$ et que ce sont les seules équivalences. Si λ est la restriction de $\widetilde{\lambda}$ à $P(F)$ la représentation π_λ est la restriction de $\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}}$ à $G(F)$. On verra en 3.3.5 que les π_λ sont irréductibles sauf si λ est non trivial d'ordre 2.

3.2. **L'opérateur d'entrelacement.** Les représentations π_λ et $\pi_{w\lambda}$ sont équivalentes et un opérateur d'entrelacement $\mathbf{M}(w,\lambda)$ entre π_λ et $\pi_{w\lambda}$ est donné pour $\varphi \in V_\lambda$ par le prolongement méromorphe de l'intégrale

$$\mathbf{M}(w,\lambda)\varphi(g) = \int_{U(F)} \varphi(wug)\,du$$

où w est l'élément non trivial du groupe de Weyl de M. De fait cette intégrale ne converge que dans un cône. En effet, si

$$p = \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(pk) = \chi(p) q_F^{(s+1)\mathbf{H}_P(p)}\varphi(k) = \chi(p)|a|^{s+1}\varphi(k) \quad \text{pour } k \in K$$

où χ est un caractère unitaire on a

$$\int_{U(F)} \varphi(wug)\,du = \int_F \varphi(\boldsymbol{k}(wu_nk))\chi(m_n)\frac{dn}{||(1,n)||^{s+1}} \quad \text{si} \quad wu_nk = m_nu'\boldsymbol{k}(wu_nk)$$

et l'intégrale est convergente pour $\Re(s) > 0$. Une telle intégrale admet un prolongement méromorphe. Par exemple, si F est un corps local non archimédien, $\chi = 1$ et $\varphi(k) \equiv 1$ on a

$$\int_{U(F)} \varphi(wug)\,du = 1 + (1-q_F^{-1})\sum_1^\infty q_F^{-ns} = \frac{1-q_F^{-s}+(1-q_F^{-1})q_F^{-s}}{1-q_F^{-s}} = \frac{Z(s)}{Z(1+s)}$$

où $Z(s) = 1/(1-q_F^{-s})$ est la fonction Zéta locale. Pour le cas général on renvoie à la littérature.

3.3. **Induction et restriction.** Soit $\widetilde{\pi}$ une représentation admissible irréductible de $\widetilde{G}(F)$. On note $X(\widetilde{\pi})$ le groupe des caractères $\boldsymbol{\chi}$ de $\widetilde{G}(F) = GL(2,F)$ (c'est-à-dire des homomorphismes dans $\mathbb{C}^\times$) tels que $\widetilde{\pi} \otimes \boldsymbol{\chi} \simeq \widetilde{\pi}$. De tels caractères $\boldsymbol{\chi}$ sont d'ordre 2 puisqu'ils doivent être triviaux sur $G(F)\widetilde{Z}(F)$.

Proposition 3.3.1. *Le groupe $X(\widetilde{\pi})$ est fini.*

Démonstration. La finitude de $X(\pi)$ est évidente si F est un corps local de caractéristique $p \neq 2$ compte tenu de la finitude du groupe quotient

$$\widetilde{G}(F)/G(F)\widetilde{Z}(F) \simeq Q_F \ .$$

Si $p = 2$ où ce quotient est seulement compact et la finitude est établie dans [S] (voir aussi [He]). □

Soit H un sous-groupe distingué fermé de $\widetilde{G}(F)$ contenant $G(F) = SL(2,F)$. On notera $X_H(\widetilde{\pi})$ le sous-groupe de $X(\widetilde{\pi})$ des χ dont la restriction à H est triviale et $n_H(\widetilde{\pi})$ son cardinal.

Proposition 3.3.2. *Toute représentation unitaire irréductible π de H apparait dans la restriction à H d'une représentation unitaire irréductible $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}(F)$. Étant données deux telles représentations $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}'$ il existe un caractère $\boldsymbol{\chi}$ du quotient $\widetilde{G}(F)/H$ tel que $\widetilde{\pi}' = \widetilde{\pi}\otimes\boldsymbol{\chi}$ et leurs restrictions à H ont les mêmes composants. Ces composants sont de la forme π^g où $\pi^g(x) = \pi(gxg^{-1})$ avec $g \in \widetilde{G}(F)$. Par restriction à H, la représentation $\widetilde{\pi}$ se décompose en une somme de $n_H(\widetilde{\pi})$ représentations deux à deux inéquivalentes de H avec multiplicité 1. Un caractère ψ du groupe additif F étant donné, si la représentation $\widetilde{\pi}$ n'est pas de dimension 1 elle admet un modèle de Whittaker relativement à ψ et un seul composant irréductible de la restriction à $G(F)$ admet un modèle de Whittaker pour ψ.*

Démonstration. L'analyse des propriétés de l'induction et de la restriction entre H et $\widetilde{G}(F)$ se fait suivant une variante de la classique théorie de Clifford (voir par exemple [LS]). La multiplicité 1 comme l'existence et l'unicité du composant π ayant un modèle de Whittaker pour un ψ donné résulte de l'unicité des modèles de Whittaker pour $\widetilde{G}(F)$, lorsqu'ils existent, et de l'induction par étages. Les représentations de $\widetilde{G}(F)$ n'admettant pas de modèle de Whittaker sont des caractères et la proposition est triviale dans ce cas. □

Remarque 3.3.3. L'existence de modèles de Whittaker est essentielle pour affirmer la multiplicité 1. On verra plus loin que pour une représentation $\widetilde{\pi}'$ du groupe des unités d'une algèbre de quaternions $\widetilde{G}'(F)$ la restriction au sous-groupe $G'(F)$ des éléments de norme 1 peut avoir des composants de multiplicité 2.

Definition 3.3.4. *On appelle L-paquet de π l'ensemble $L(\pi)$ des classes d'équivalence de représentations de la forme π^g lorsque g parcourt $\widetilde{G}(F)$.*

Un premier exemple.

Lemme 3.3.5. *Une représentation de la série principale unitaire π_λ est réductible si et seulement si λ est d'ordre 2 non trivial. Dans ce cas elle se décompose en deux représentations inéquivalentes.*

Démonstration. Si $\widetilde{\pi} = \pi(\mu, \nu)$ est une série principale pour $\widetilde{G}(F)$ alors

$$\widetilde{\pi} \otimes \boldsymbol{\chi} = \pi(\mu\chi, \nu\chi)$$

où $\boldsymbol{\chi} = \chi \circ \det$. Donc $\widetilde{\pi} \simeq \widetilde{\pi} \otimes \boldsymbol{\chi}$ avec χ non trivial impose $\mu\chi = \nu$ et $\mu = \nu\chi$ de sorte que

$$\widetilde{\pi} = \pi(\mu, \mu\chi) = \pi(1, \chi) \otimes \mu \ .$$

Cette représentation se restreint en une somme de deux représentations inéquivalentes π^+ et π^- de $G(F)$. □

Soit $\widetilde{\pi}$ une représentation de $\widetilde{G}(F)$ et $\chi \in X(\widetilde{\pi})$. Un tel caractère χ est nécessairement de la forme $\chi = \varepsilon_{E/F}$ où E/F est une extension quadratique séparable, non déployée si χ est non trivial, ce que l'on supposera désormais. En particulier $\widetilde{\pi}$ n'est pas de dimension 1. On note $\widetilde{G}(F)_E$ le sous-groupe d'indice 2 de $\widetilde{G}(F)$ des matrices dont le déterminant est dans l'image de norme

$$N_{E/F} = E^\times \to F^\times \ .$$

On fixe un caractère additif ψ D'après 3.3.2 la représentation $\widetilde{\pi}$ est induite d'une représentation irréductible $\widetilde{\pi}^+$ de $\widetilde{G}(F)_E$ ayant un modèle de Whittaker pour ψ et la restriction de $\widetilde{\pi}$ à $\widetilde{G}(F)_E$ est somme de deux représentations inéquivalentes $\widetilde{\pi}^+ \oplus \widetilde{\pi}^-$ échangées par conjugaison par un élément $s \in \widetilde{G}(F)$ dont le déterminant n'est pas une norme de E/F. Soit $\widetilde{T}(F)$ un tore dans $\widetilde{G}(F)$ et pour $t \in \widetilde{T}(F) \cap \widetilde{G}(F)_E$ régulier considérons la différence des caractères distribution :

$$\Xi_{\widetilde{\pi}}(t) = \operatorname{trace} \widetilde{\pi}^+(t) - \operatorname{trace} \widetilde{\pi}^-(t) \ .$$

Cette distribution est représentée par une fonction localement intégrable ([Le]) sur $\widetilde{G}(F)_E$.

Lemme 3.3.6. *Soit $\widetilde{T}$ un tore de $\widetilde{G}(F)$ non isomorphe à $\widetilde{T}_{E/F}(F)$. Alors pour $t \in \widetilde{T}(F) \cap \widetilde{G}(F)_E$ régulier $\Xi_{\widetilde{\pi}}(t) = 0$.*

Démonstration. Soit $t \in \widetilde{T}(F) \cap \widetilde{G}(F)_E$ où $\widetilde{T}$ n'est pas isomorphe à $\widetilde{T}_{E/F}$. Dans ce cas il existe $s \in \widetilde{T}(F)$ tel que $\varepsilon_{E/F}(s) = -1$. Mais alors

$$\operatorname{trace} \widetilde{\pi}^+(t) = \operatorname{trace} \widetilde{\pi}^+(sts^{-1}) = \operatorname{trace} \widetilde{\pi}^-(t) \ .$$

□

Nous allons maintenant construire d'autres couples de représentations $(\widetilde{\pi}^+, \widetilde{\pi}^-)$.

3.4. **Représentation de Weil et endoscopie spectrale.** Soit E un corps extension quadratique séparable de F (éventuellement déployée). On considère $\Phi \in \mathcal{S}(E)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur E. On pose

$$\boldsymbol{d}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{n}(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$\big(r_\psi(\boldsymbol{d}(a,a^{-1})\big)\Phi)(e) = \varepsilon_{E/F}(a)|a|_F \Phi(ae)$$
$$\big(r_\psi(\boldsymbol{n}(u)\big)\Phi)(e) = \psi(u\, e\overline{e})\,\Phi(e)$$
$$\big(r_\psi(\boldsymbol{w})\Phi\big)(e) = \lambda(E/F,\psi)\,\widehat{\Phi}(\overline{e})$$

où

$$\widehat{\Phi}(e) : \int_E \Phi(\epsilon)\psi(e\epsilon)\,d\epsilon \ .$$

On a ainsi défini des opérateurs unitaires dans un sous-espace dense de l'espace de Hilbert $L^2(E)$ (pour une mesure de Haar additive sur E). On sait que $G(F)$ est engendré par ces trois familles d'éléments et on vérifie (cf. §1 de [JL] et [W]) que les opérateurs associés vérifient les relations de commutation. Ils engendrent une représentation unitaire r_ψ de $G(F)$ appelée représentation de Weil (associée à l'extension quadratique séparable E/F et au caractère additif ψ). On peut décomposer r_ψ en une somme directe hilbertienne suivant les caractères θ de E^1 le sous-groupe compact des éléments de norme 1 de $E^\times$:

$$\mathcal{S}(E) = \bigoplus_\theta \mathcal{S}(E,\theta)$$

où $\mathcal{S}(E,\theta)$ est le sous-espace des $\Phi \in \mathcal{S}(E)$ satisfaisant

$$\Phi(et) = \theta(t)^{-1}\Phi(e) \quad \text{pour tout} \quad t \in E^1 \ .$$

La restriction de r_ψ au sous-espace de Hilbert engendré par $\mathcal{S}(E,\theta)$ est une représentation qui sera notée $\pi(\theta,\psi)$.

On notera $F_E^\times = N_{E/F}E^\times$ le sous-groupe des $x \in F^\times$ qui sont des normes c'est-à-dire tels que $x = e\overline{e}$ pour un $e \in E^\times$. Si $\psi'(x) := \psi(ax)$ avec $a = \epsilon\overline{\epsilon} \in F_E^\times$ l'application $\Phi \mapsto \Phi_\epsilon$, définie par $\Phi_\epsilon(e) = \Phi(e\epsilon)$, entrelace les représentations $\pi(\theta,\psi)$ et $\pi(\theta,\psi')$ qui sont donc équivalentes. L'application $\Phi \mapsto \widetilde{\Phi}$, définie par $\widetilde{\Phi}(e) = \Phi(\overline{e})$, entrelace $\pi(\theta,\psi)$ et $\pi(\theta^{-1},\psi)$ qui sont donc équivalentes.

Nous noterons π^+ la classe d'équivalence de la représentation $\pi(\theta,\psi)$ et π^- celle de $\pi(\theta,\psi')$ où $\psi'(x) = \psi(ax)$ avec $a \notin F_E^\times$.

Rappelons une construction introduite dans le §4 de [JL] et poursuivie dans [Lan]. Soit $\widetilde{\theta}$ un caractère unitaire de $E^\times$ qui prolonge θ ; on associe à une $\Phi \in \mathcal{S}(E,\theta)$ une fonction ϕ sur $F_E^\times$ en posant

$$\phi(f,x) = \widetilde{\theta}(e)|e|_E^{1/2}\Phi(e) \qquad \text{pour } x = e\overline{e} \in F_E^\times \ .$$

La représentation π^+ se réalise dans l'espace $L^2(F_E^\times)$, pour une mesure de Haar notée $d^\times x$ sur ce groupe, au moyen des opérateurs suivants :

$$\Big(\pi^+\big(\boldsymbol{d}(\alpha,\alpha^{-1})\phi\big)\Big)(x) = \big(\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta}(\alpha)\big)^{-1}\phi(\alpha^2 x) \qquad \text{pour } \alpha \in F^\times$$

$$\big(\pi^+(\boldsymbol{n}(u))\phi\big)(x) = \psi(ux)\,\phi(f,x)$$

$$\big(\pi^+(\boldsymbol{w})\phi\big)(x) = \int_{F_E^\times} J(x,y)\phi(y)d^\times y$$

où le noyau $J(x,y)$ est défini comme suit : on doit avoir

$$\big(\pi^+(\boldsymbol{w})\phi\big)(x) = \lambda(E/F,\psi)\widetilde{\theta}(e)|e|_E^{1/2}\widehat{\Phi}(\overline{e})$$

avec

$$\widehat{\Phi}(\overline{e}) = \int_{E^\times} \psi(\overline{e}\epsilon)\Phi(\epsilon)|\epsilon|_E\, d^\times\epsilon = \int_{E^\times} \psi(\overline{e}\epsilon)\widetilde{\theta}(\epsilon)^{-1}|\epsilon|_E^{1/2}\phi(y)\, d^\times\epsilon\ .$$

En posant $y = \epsilon\overline{\epsilon}$, $\eta = e\epsilon$ et $t = \epsilon\overline{\epsilon}^{-1}$ de sorte que $\overline{e}\epsilon = t\overline{\eta}$, on a

$$(\star)\qquad J(x,y) = \lambda(E/F,\psi)\,\widetilde{\theta}(x)|x|_F \int_{|t|=1} \psi_E(t\overline{\eta})\widetilde{\theta}(t\overline{\eta})^{-1}\left|\frac{\epsilon}{e}\right|^{1/2} d^\times t$$

où les mesures de Haar sur $E^\times$, $F_E^\times$ et $T(F)$ sont normalisées de façon compatible à la suite exacte

$$1 \to T(F) \to E^\times \to F_E^\times \to 1$$

la flèche $E^\times \to F_E^\times$ étant la norme $\epsilon \mapsto \epsilon\overline{\epsilon}$. On observera qu'un composant de π^+ admet un modèle de Whittaker pour ψ : c'est l'espace des fonctions

$$W_\phi(g) = \big(\pi^+(g)\phi\big)(1)\ .$$

Si π est une représentation unitaire irréductible de $G(F)$ nous noterons χ_π (et aussi "trace π") le caractère de π (cf. A.2.1). Nous aurons besoin du lemme 7.19 de [Lan]. [2] Nous en reproduisons la preuve à ceci près que la partie la plus délicate de l'argument est désormais inutile puis qu'on sait grace à [Le] que le caractère est donné par une fonction localement intégrable.

Proposition 3.4.1. *Si g est conjugué de $\gamma = \alpha + \beta\boldsymbol{\tau} \in E^1$*

$$\operatorname{trace}\widetilde{\pi}^+(t) - \operatorname{trace}\widetilde{\pi}^-(t) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}(-1)\varepsilon_{E/F}\Big(\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{\tau-\overline{\tau}}\Big)\frac{\big(\theta(\gamma)+\theta(\gamma^{-1})\big)}{|\gamma-\gamma^{-1}|}\ .$$

Démonstration. Si

$$h = \begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u & 1-uv\\ -1 & -v\end{pmatrix}$$

on a

$$\Big(\pi^+(h)\phi\Big)(x) = \int_{F_E^\times} J(x,y)\psi(ux+vy)\phi(y)d^\times y$$

Un élément $g \in G(F)$ dans la grosse cellule s'écrit

$$g = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} h = \begin{pmatrix}-\alpha u & \alpha(1-uv)\\ -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1}v\end{pmatrix}$$

2. On observera que [LL] renvoie à des énoncés du chapitre 5 des notes de l'IAS sur le Changement de Base, devenu le chapitre 7 du livre [Lan].

avec $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. Donc

$$u = ac \quad , \quad v = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{-1}{c}$$

et

$$\Big(\pi^+(g)\phi\Big)(x) = \varepsilon_{E/F}(\alpha)\widetilde{\theta}(\alpha)^{-1}\Big(\pi^+(h)\phi\Big)(\alpha^2 x)$$

est représenté par un noyau intégral :

$$(\pi^+(g)\phi)(x) = \int_{F_E^\times} (\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})(-c)J(\frac{x}{c^2}, y)\psi\Big(\frac{ax+dy}{c}\Big)\phi(y)d^\times y \ .$$

La représentation virtuelle $\pi^+ - \pi^-$ est donc représentée par le noyau intégral :

$$\Big(\big(\pi^+(g) - \pi^-(g)\big)\phi\Big)(x) = \int_{F^\times} (\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})(-c)J(\frac{x}{c^2}, y)\psi\Big(\frac{ax+dy}{c}\Big)\phi(y)d^\times y \ .$$

La différence des caractères $\chi_{\pi^+} - \chi_{\pi^-}$, calculée au sens des distributions sur $G(F)$, est la valeur principale de l'intégrale sur la diagonale de ce noyau

$$\chi_{\pi^+}(g) - \chi_{\pi^-}(g) = vp\int_{F^\times} (\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})(-c)J(\frac{x}{c^2}, x)\psi\Big(\frac{x\mathfrak{t}}{c}\Big)d^\times x \ .$$

où $\mathfrak{t}$ est la trace de g, soit encore

$$\chi_{\pi^+}(g) - \chi_{\pi^-}(g) = vp\int_{F^\times} (\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})(-c)J(\frac{x}{c}, xc)\psi(x\mathfrak{t})d^\times x \ .$$

ce qui, compte tenu de la définition de J (voir ($\star$) ci-dessus), est encore égal à

$$\lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}(-c)vp\int_F\int_{|t|=1} \widetilde{\theta}(-x)\widetilde{\theta}(t\overline{\eta})^{-1}\psi_E(t\overline{\eta})\psi(x\mathfrak{t}) \ dx \ \ d^\times t \ .$$

Comme $x = y$ on a $\eta\overline{\eta} = x^2$ et donc $\eta = t_1 x$ où $|t_1| = 1$. L'expression ci-dessus peut alors s'écrire

$$\lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}(-c)vp\int_F\int_{|t|=1} \widetilde{\theta}(t)^{-1}\psi_E(-xt)\psi(x\mathfrak{t}) \ dx \ \ d^\times t$$

soit encore, en rappelant que $\mathfrak{t} = \operatorname{trace} g$,

$$\lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}(-c)vp\int_F\int_{|t|=1} \widetilde{\theta}(t)^{-1}\psi\Big(x\big(\operatorname{trace} g - \operatorname{trace}_{E/F} t\big)\Big)dx \ \ d^\times t \ .$$

On rappelle qu'au sens des distributions

$$\int_F \psi(xy)dy = \delta(x)$$

où δ est la mesure de Dirac à l'origine et que pour $t \in E^1$ les différentielles vérifient :

$$\partial(\operatorname{trace} t) = \partial(t + t^{-1}) = (t - t^{-1})\frac{\partial t}{t} \ .$$

On obtient

$$\operatorname{trace}\pi^+(t) - \operatorname{trace}\pi^-(t) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}(-c)\frac{\big(\theta(\gamma)+\theta(\gamma^{-1})\big)}{|\gamma-\gamma^{-1}|}$$

Pour conclure on observe que si

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est conjugué de $\gamma = \alpha + \beta\boldsymbol{\tau} \in E^1$ alors $\varepsilon_{E/F}(c) = \varepsilon_{E/F}(\beta)$ et donc

$$\varepsilon_{E/F}(-c) = \varepsilon_{E/F}(-1)\varepsilon_{E/F}\Big(\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{\tau-\overline{\tau}}\Big)$$

$\square$

On a noté $\widetilde{G}(F)_E$ le sous-groupe de $\widetilde{G}(F)$ des matrices dont le déterminant est dans l'image de la norme $N_{E/F}$. En fait $\pi^+ := \pi(\theta,\psi)$ se prolonge à $\widetilde{G}(F)_E$ en une représentation $\widetilde{\pi}^+ := \pi(\widetilde{\theta},\psi)$ au moyen des opérateurs

$$\big(\widetilde{\pi}^+(\boldsymbol{d}(\alpha,\beta))\phi\big)(x) = (\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})(\beta)\phi(\alpha\beta^{-1}x) \qquad \text{pour } \alpha\beta \in F_E^\times\ .$$

Le sous-groupe $\widetilde{G}(F)_E$ est d'indice 2 dans $\widetilde{G}(F)$ et on définit une représentation $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ de $\widetilde{G}(F)$ par induction :

$$\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}} := \operatorname{Ind}_{\widetilde{G}(F)_E}^{\widetilde{G}(F)} \pi(\widetilde{\theta},\psi)\ .$$

Il résulte de 3.3.2 que $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ décompose par restriction à $\widetilde{G}(F)_E$ en deux représentations inéquivalentes irréductibles :

$$\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}\Big|_{\widetilde{G}(F)_E} = \pi(\widetilde{\theta},\psi)\oplus\pi(\widetilde{\theta},\psi_a)$$

où $a \notin F_E^\times$. Les représentations $\pi(\widetilde{\theta},\psi)$ sont irréductibles en tant que représentations de $\widetilde{G}(F)_E$ mais on verra en 3.4.5 que ce n'est plus toujours le cas par restriction à $G(F)$. Une variante de 3.4.1 montre que

$$\Xi_{\widetilde{\theta}}(g) := \operatorname{trace}\pi(\widetilde{\theta},\psi)(g) - \operatorname{trace}\pi(\widetilde{\theta},\psi')(g)$$

où $\psi'(x) = \psi(ax)$ avec $a \notin F_E^\times$ admet l'expression suivante :

$$\Xi_{\widetilde{\theta}}(g) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}(-1)\varepsilon_{E/F}\Big(\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{\tau-\overline{\tau}}\Big)\frac{\big(\widetilde{\theta}(\gamma)+\widetilde{\theta}(\overline{\gamma})\big)}{|\gamma-\overline{\gamma}|}$$

si g est conjugué dans $\widetilde{G}(F)_E$ à la matrice $\gamma = \alpha+\beta\boldsymbol{\tau}$.

Les représentations $\pi(\widetilde{\theta},\psi)$ et $\pi(\widetilde{\theta},\psi')$ sont équivalentes si $\psi' = \psi_a$ où $\psi_a(x) := \psi(ax)$ et $a \in F_E^\times = N_{E/F}E^\times$.

On observera que dans [Lan] et [LL] les formules pour $\Xi_{\widetilde{\theta}}$ différent de la nôtre par le facteur $\varepsilon_{E/F}(-1)$. Cela résulte d'un choix different pour l'identification de T avec $T_{E/F}$ (voir page 137 ligne -4 de [Lan]). Notre choix du facteur de transfert est aussi différent.

Corollaire 3.4.2.

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\,\Xi_{\widetilde{\theta}}(t)=\varepsilon_{E/F}(-1)\big(\widetilde{\theta}(t)+\widetilde{\theta}(\bar{t})\big)\ .$$

Démonstration. Compte tenu de 1.1.2 et 2.1.1 la formule souhaitée est une conséquence immédiate de 3.4.1. □

Proposition 3.4.3. *Les représentations $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ sont unitaires irréductibles et indépendantes du choix de ψ. Les représentations $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ et $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}'}$ sont inéquivalentes sauf si $\widetilde{\theta}'=\widetilde{\theta}\circ\sigma$ avec $\sigma\in\mathrm{Gal}\,(E/F)$. C'est une série principale si $\theta=1$ c'est-à-dire si $\widetilde{\theta}$ est le composé d'un caractère μ de $F^\times$ avec la norme : $\widetilde{\theta}=\mu\circ N_{E/F}$ auquel cas*

$$\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}=\pi(\mu,\mu\varepsilon_{E/F})\ .$$

Les $\pi_{E,\theta}$ sont cuspidales si $\theta\neq1$. De plus si χ est un caractère (unitaire) de $F^\times$, vu comme un caractère de $\widetilde{G}(F)$ par composition avec le déterminant, on a :

$$\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}\otimes\boldsymbol{\chi}\simeq\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}.\xi}$$

où ξ est un caractère de $E^\times$ trivial sur E^1 : $\xi(x)=\chi(x\overline{x})$.

Démonstration. Les diverses assertions résultent des théorèmes 4.6 et 4.7 de [JL]. □

Proposition 3.4.4. *Soit $\widetilde{\pi}=\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$. Le cardinal du groupe $X(\widetilde{\pi})$: il est d'ordre 1, 2 ou 4. S'il est d'ordre 4 alors $X(\widetilde{\pi})\simeq\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. On sait que la restriction de $\widetilde{\pi}$ à $G(F)$ est irréductible si $X(\widetilde{\pi})$ est un singleton. Sinon, il existe un caractère χ non trivial d'ordre 2 tel que

$$\widetilde{\pi}\otimes\boldsymbol{\chi}\simeq\widetilde{\pi}\ .$$

Soit E/F l'extension quadratique séparable telle que $\chi=\varepsilon_{E/F}$. Il résulte de 3.4.6 que $\widetilde{\pi}=\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ pour un caractère $\widetilde{\theta}$ de $E^\times$. Supposons d'abord $\theta=1$ c'est-à-dire que $\widetilde{\theta}$ est le composé d'un caractère de $F^\times$ et de la norme pour E/F. Dans ce cas $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ est une série principale $\pi(\widetilde{\theta},\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})$ (c'est-à-dire induite unitaire par le caractère du tore des matrices diagonales défini par $(\widetilde{\theta},\varepsilon_{E/F}\widetilde{\theta})$) et il en résulte que $\varepsilon_{E/F}$ est le seul caractère χ non trivial tel que

$$\widetilde{\pi}\otimes\boldsymbol{\chi}\simeq\widetilde{\pi}\ .$$

Nous supposerons désormais $\theta\neq1$. On en donnera deux démonstrations indépendantes.
– Première démonstration. D'après 3.4.3, pour $\chi\in X(\widetilde{\pi})$ on aura

$$\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}\otimes\boldsymbol{\chi}\simeq\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}.\xi}\simeq\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}\quad\text{et donc}\quad\widetilde{\theta}(x)\chi(x\overline{x})=\widetilde{\theta}\circ\sigma(x)$$

avec $\sigma\in\mathrm{Gal}\,(E/F)$ et où $\xi(x)=\chi(x\overline{x})$. Supposons $\chi\notin\{1,\varepsilon_{E/F}\}$; cela impose

$$\widetilde{\theta}(x)\chi(x\overline{x})=\widetilde{\theta}(\overline{x})\quad\text{et donc}\quad\chi(x\overline{x})=\widetilde{\theta}(\overline{x}/x)=\xi(x)$$

où ξ est un caractère non trivial d'ordre 2 de $E^\times$. Puisque l'application $x\mapsto x/\overline{x}$ est une surjection de $E^\times$ sur le tore $T_{E/F}(F)\simeq E^1$ ceci impose

$$\widetilde{\theta}(\overline{x}/x)=\theta(\overline{x}/x)=\xi(x)$$

et donc $\theta^2 = 1$. Le noyau N de ξ est l'image par la norme du groupe multiplicatif $L^\times$ pour une extension quadratique L/E. Tout élément de $X(\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}})$ est trivial sur l'image de N par la norme de E/F qui est un sous-groupe d'ordre 4 de $F^\times$. Donc $X(\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}})$ a 4 éléments et comme chaque élément est d'ordre 2 le groupe $X(\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. L'extension L/F est bi-quadratique ; son groupe de Galois est le dual de $X(\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}})$.
– Seconde démonstration. Soient $\theta \neq 1$, $\pi^+ = \pi(\theta, \psi)$ et $\pi^- = \pi(\theta, \psi')$ où $\psi'(x) = \psi(ax)$ pour $a \notin F_E^\times = N_{E/F}E^\times$. Avec la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact $T_{E/F}(F)$ on a d'après 3.4.1,

$$\int_{T_{E/F}(F)} |\mathrm{trace}\,\pi^+(t) - \mathrm{trace}\,\pi^-(t)|^2 \Delta_T(t)^2\, dt = \int_{T_{E/F}(F)} |\theta(t) + \theta(t^{-1})|^2\, dt$$

et donc

$$\int_{T_{E/F}(F)} |\mathrm{trace}\,\pi^+(t) - \mathrm{trace}\,\pi^-(t)|^2 \Delta_T(t)^2\, dt = \begin{cases} 2 & \text{si } \theta^2 \neq 1 \\ 4 & \text{si } \theta^2 = 1 \end{cases}$$

Maintenant les relations d'orthogonalité (cf. A.2.3) montrent que π^+ et π^- sont irréductibles si $\theta^2 \neq 1$ et que si $\theta^2 = 1$ (mais $\theta \neq 1$) chacune se décompose en somme de deux représentations donnant au total quatre représentations irréductibles inéquivalentes. On conclut comme ci-dessus. $\square$

En résumé on a les assertions suivantes (cf. [ST] lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2).

Proposition 3.4.5.

(i) – Les représentations $\pi(\theta, \psi)$, restriction à $G(F)$ des représentations $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}, \psi)$ de $\widetilde{G}(F)_E$, sont irréductibles sauf si $\theta^2 = 1$ et $\theta \neq 1$ auquel cas elles se décomposent en deux représentations inéquivalentes.

(ii) – Les représentations $\pi(\theta, \psi)$ et $\pi(\theta', \psi)$ sont inéquivalentes sauf si $\theta' = \theta^{\pm 1}$.

(iii) – Elles sont cuspidales si $\theta \neq 1$. Si $\theta = 1$ ce sont des "limites de série discrètes".

Démonstration. La définition de $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ par induction de $\widetilde{G}(F)_E$ à $\widetilde{G}(F)$ montre que

$$\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}|_{G(F)} = \pi(\theta, \psi) \oplus \pi(\theta, \psi_a)$$

avec $a \notin F_E^\times$. L'action du groupe de Galois de E/F :

$$\sigma : e \mapsto \overline{e}$$

induit un isomorphisme entre $\pi(\theta, \psi)$ et $\pi(\theta^{-1}, \psi)$. Ceci montre une partie de (i) et (ii) et on invoque 3.4.4. L'assertion (iii) se déduit de 3.4.3. $\square$

Soit χ un caractère de $F^\times/(F^\times)^2$. Par abus de notation on notera encore χ le caractère de $\widetilde{G}(F)$ obtenu par composition avec le déterminant. Rappelons maintenant le lemme 7.17 de [Lan].

Proposition 3.4.6. *Si χ est non trivial, une représentation $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}(F)$ qui vérifie $\widetilde{\pi}\otimes\boldsymbol{\chi} \simeq \widetilde{\pi}$ est de la forme $\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ où $\widetilde{\theta}$ est un caractère de $E^\times$ où E est l'extension quadratique séparable de F attachée à χ par la théorie du corps de classe.*

Démonstration. Si $\widetilde{\pi}$ est une série principale et donc, dans les notations de [JL], $\widetilde{\pi} = \pi(\mu,\nu)$ on a déjà observé que $\pi(\mu,\nu)\otimes\boldsymbol{\chi} \simeq \pi(\mu\chi,\nu\chi)$ et comme par ailleurs on suppose que $\pi(\mu,\nu)\otimes\boldsymbol{\chi}\simeq\pi(\mu,\nu)$ ceci impose $\nu = \mu\chi$ si χ est non trivial :

$$\widetilde{\pi} = \pi(\mu,\mu\chi) = \pi(1,\chi)\otimes\mu = \widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$$

où $\widetilde{\theta} = \mu\circ N_{E/F}$ (cf. [JL, Theorem 4.6]). Le cas des représentations spéciales est exclu. Supposons maintenant que $\widetilde{\pi}$ est cuspidale. Une représentation $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}(F)$ qui vérifie $\widetilde{\pi}\otimes\boldsymbol{\chi}\simeq\widetilde{\pi}$ est nécessairement induite d'une représentation irréductible $\widetilde{\pi}^+$ de $\widetilde{G}(F)_E$ et la restriction de $\widetilde{\pi}$ à $\widetilde{G}(F)_E$ est somme de deux représentations inéquivalentes $\widetilde{\pi}^+\oplus\widetilde{\pi}^-$ échangées par conjugaison par un élément dont le déterminant n'est pas une norme de E/F. Soit $T(F)$ un tore dans $G(F)$ et pour $t\in T(F)$ régulier considérons la différence des caractères :

$$\Xi_{\widetilde{\pi}}(t) = \mathrm{trace}\,\widetilde{\pi}^+(t) - \mathrm{trace}\,\widetilde{\pi}^-(t)\ .$$

D'après 3.3.6 cette différence est nulle si T n'est pas isomorphe à $T_{E/F}$. Par ailleurs, on a observé en 1.1 que l'élément de $\widetilde{G}(F)$ noté $\boldsymbol{w}_E$ était tel que

$$\boldsymbol{w}_E\gamma\boldsymbol{w}_E^{-1} = \overline{\gamma} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{E/F}\big(\det(\boldsymbol{w}_E)\big) = \varepsilon_{E/F}(-1)\ .$$

Il en résulte que

$$\Xi_{\widetilde{\pi}}(\boldsymbol{w}_E g\boldsymbol{w}_E^{-1}) = \varepsilon_{E/F}(-1)\Xi_{\widetilde{\pi}}(g)$$

et donc

$$\Xi_{\widetilde{\pi}}(t) = \varepsilon_{E/F}(-1)\Xi_{\widetilde{\pi}}(\overline{t})$$

pour $t\in\widetilde{T}(F)$. De même

$$\Xi_{\widetilde{\theta}}(t) = \varepsilon_{E/F}(-1)\Xi_{\widetilde{\theta}}(\overline{t})\ .$$

On se restreint maintenant à des représentations de $\widetilde{G}(F)$ qui admettent un même caractère central. On observe que les $\Xi_{\widetilde{\theta}}$ forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert des fonctions vérifiant ces relations avec caractère central donné. Compte tenu des relations d'orthogonalité pour les caractères ([JL, Chapter 15], A.2.1 et A.2.3) il en résulte que $\Xi_{\widetilde{\pi}}$ ne peut pas être orthogonal à tous les $\Xi_{\widetilde{\theta}}$ et il y a nécessairement un $\widetilde{\theta}$ tel que

$$\Xi_{\widetilde{\pi}} = \pm\Xi_{\widetilde{\theta}}\ .$$

□

3.5. **Transfert spectral local.** Soit F un corps local et $f \in \mathcal{C}_c^\infty\big(G(F)\big)$ on souhaite définir un transfert spectral $\pi \mapsto \pi^{\mathcal{E}}$ dual du transfert géométrique. Il doit vérifier

$$\operatorname{trace} L(\pi)(f^{\mathcal{E}}) = \operatorname{trace} \pi^{\mathcal{E}}(f)$$

où $L(\pi)$ est la somme des représentations dans le L-paquet contenant π. On a vu que c'est l'ensemble des classes de représentation π^g où g parcourt $\widetilde{G}(F)$. Cet ensemble est fini de cardinal 1,2 ou 4 avec toujours multiplicité 1. Nous verrons que pour les unités des algèbres de quaternions les L-paquets sont de cardinal 1 ou 2 mais certains L-paquets sont des singletons mais avec multiplicité 2.

Lorsque $\mathcal{E}$ est la donnée endoscopique principale c'est-à-dire $\mathcal{E} = (SL(2), 1)$ le transfert géométrique est trivial : $f^{\mathcal{E}} = f$ et le transfert spectral vérifie

$$\pi^{\mathcal{E}} = L(\pi) \ .$$

Si $\mathcal{E}$ est une donnée endoscopique attachée à une extension quadratique (éventuellement déployée) E/F et θ un caractère unitaire du groupe $T_{\mathcal{E}}(F)$ on souhaite montrer l'existence des représentations virtuelles $\theta^{\mathcal{E}}$ (c'est-à-dire combinaisons linéaires formelles de représentations irréductibles) de $G(F)$ telles que

$$\int_{T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(t)\theta(t)\,dt = \theta(f^{\mathcal{E}}) = \operatorname{trace} \theta(f^{\mathcal{E}}) = \operatorname{trace} \theta^{\mathcal{E}}(f)$$

Proposition 3.5.1. *(1) Si $E = F \oplus F$ et si θ est un caractère du tore diagonal, on a*

$$\int_{T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(t)\theta(t)\,dt = \operatorname{trace} \pi_{E,\theta}(f)$$

où $\pi_{E,\theta}$ est la série principale induite-parabolique (normalisée) de θ vu comme un caractère du sous-groupe parabolique P.
(2) Si E est un corps, pour notre choix du plongement de E^1 dans $G(F)$ on a

$$\int_{T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(t)\theta(t)\,dt = \operatorname{trace} \pi^+_{E,\theta}(f) - \operatorname{trace} \pi^-_{E,\theta}(f)$$

où :

$$\pi^+_{E,\theta} = \pi(\theta,\psi) \qquad \textit{et} \qquad \pi^-_{E,\theta} = \pi(\theta,\psi')$$

si $\psi'(x) = \psi(ax)$ pour un $a \notin N_{E/F}E^\times$.

Démonstration. On observe qu'avec notre choix de la constante c du facteur de transfert et d'après 1.1.2

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t)^2 = \varepsilon_{E/F}(-1)\Delta_T(t)^2 \ .$$

Si $E = F \oplus F$ l'assertion (1) est une conséquence immédiate de 2.2.1 et de la formule pour la trace des séries principales. Lorsque E est un corps et compte tenu de 3.4.2 et on a

$$\Delta_T(t)^2\, \Xi_\theta(t) = \Delta^{\mathcal{E}}(t,t)\big(\theta(t) + \theta(\bar{t})\big)$$

où

$$\Xi_\theta(t) = \operatorname{trace} \pi^+_{E,\theta}(t) - \operatorname{trace} \pi^-_{E,\theta}(t) \ .$$

Maintenant au vu de 2.3.3 et 2.3.4 on a

$$\int_{T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(t)\theta(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(t)\big(\theta(t)+\theta(t^{-1})\big)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{T_{E/F}(F)} \Delta_T(t)^2\;\Xi_\theta(t)\mathcal{O}^\kappa(f,t)\,dt$$

On rappelle que

$$\mathcal{O}^\kappa(t,f) = \mathcal{O}(t,f) - \mathcal{O}(t',f)$$

où t' est stablement conjugué mais non conjugué à t. On distingue deux cas : si il existe une seule classe de $G(F)$-conjugaison de tores dans $G(F)$ isomorphe à $T_{E/F}$ alors t et t^{-1} sont stablement conjugués mais non conjugués dans $G(F)$ et $w_T = 1$. Dans l'autre cas t et t^{-1} sont conjugués dans $G(F)$ mais il y a deux classes de $G(F)$-conjugaisons de tores isomorphes à $T_{E/F}$ et $w_T = 2$. Dans tous les cas la formule d'intégration de Weyl 1.3.3 montre que :

$$\int_{T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(t)\theta(t)\,dt = \int_{G(F)} \Xi_\theta(x)f(x)\,dx = \operatorname{trace}\pi^+_{E,\theta}(f) - \operatorname{trace}\pi^-_{E,\theta}(f)\ .$$

□

Remarque 3.5.2. La correspondance $\theta \mapsto \theta^{\mathcal{E}}$ suppose divers choix : celui du caractère additif ψ et l'identification entre T et $T_{E/F}$ et du facteur de transfert. Comme déjà observé juste après 3.4.2 ce n'est pas la même identification pour les tores qui est utilisée dans [LL]. Il semble que l'identification choisie ici soit plus naturelle. Elle justifie alors le choix du facteur de transfert.

On pourra observer que la proposition 3.5.1 fournit une nouvelle démonstration du Lemme Fondamental 2.3.4. En effet, si l'extension E/F est non ramifiée (resp. déployée), l'espace de la représentation $\pi^+_{E,\theta} = \pi(\theta,\psi)$ (resp $\pi_{E,\theta}$) est non-ramifiée (i.e. possède un vecteur invariant sous un sous)groupe hyperspécial) si et seulement θ est non ramifié.

3.6. **Action de l'opérateur d'entrelacement.** Soit π_ξ la représentation de la série principale induite parabolique (normalisée) par le caractère ξ de $F^\times$. On note $\mathbf{R}(\xi)$ l'opérateur d'entrelacement normalisé entre π_ξ et $\pi_{\xi^{-1}}$.

On suppose maintenant que $\xi = \varepsilon_{E/F}$. Donc, ξ est d'ordre 2 et l'opérateur $\mathbf{R}(\xi)$ est un endomorphisme dont le carré est l'identité. Si $E = F\oplus F$ alors $\xi = 1$ et $\mathbf{R}(\xi)$ est l'identité. Si E est un corps extension quadratique de F ; la représentation π_ξ se décompose en deux sous-représentations irréductibles :

$$\pi_\xi = \pi(\mathbf{1}_E,\psi)\oplus\pi(\mathbf{1}_E,\psi')$$

où $\mathbf{1}_E$ est le caractère trivial du groupe compact E^1. On pose $\pi^+_E = \pi(\mathbf{1}_E,\psi)$ et $\pi^-_E = \pi(\mathbf{1}_E,\psi')$. On observera que π^+_E admet un modèle de Whittaker pour ψ. Le lemme ci-après est [LL, Lemma 3.6].

Lemme 3.6.1. *L'opérateur* $\mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})$ *vaut* ±1 *sur* $\pi^\pm_E$

Démonstration. Comme $\varepsilon_{E/F}$ est d'ordre 2 et non trivial, l'endomorphisme $\mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})$ est non trivial et de carré l'identité ; il vaut nécessairement $+1$ sur un des composants et -1 sur l'autre. Reste à montrer que c'est $+1$ sur le composant admettant un modèle de Whittaker. D'après la formule (7.1) page 106 de [Lan] on dispose d'un développement asymptotique de la forme

$$\Psi(\alpha) \sim c\nu(\alpha)|\alpha|^{1/2}\big\{\varphi(1) + \varepsilon_{E/F}(\alpha)\mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})\varphi(1)\big\} \ .$$

On a deux expressions pour l'opérateur d'entrelacement appliqué à ce développement asymptotique :

$$b\varepsilon_{E/F}(\alpha)\Psi(\alpha) \sim \mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})c\nu(\alpha)|\alpha|^{1/2}\big\{\varphi(1) + \varepsilon_{E/F}(\alpha)\mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})\varphi(1)\big\}$$

où $b = \pm 1$. On a donc

$$\big(b\varepsilon_{E/F}(\alpha) - \mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})\big)\big(1 + \varepsilon_{E/F}(\alpha)\mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})\big)\varphi(1) = 0$$

soit encore

$$(b-1)\big(\varepsilon_{E/F}(\alpha) + \mathbf{R}(\varepsilon_{E/F})\big)\varphi(1) = 0$$

ce qui impose $b = 1$. $\square$

4. La formule des traces pour $SL(2)$

4.1. **Un peu d'histoire.** Désormais F est un corps global. Nous allons tout d'abord expliciter la formule des traces pour $SL(2)$ sous sa forme non-invariante en suivant les techniques de troncatures géométrique et spectrale utilisées dans [JL] qui ont été généralisées par Arthur au cas d'un groupe réductif quelconque. Du côté spectral, c'est-à-dire pour les séries d'Eisenstein, la troncature a été introduite par Selberg en rang 1 puis généralisée par Langlands en rang arbitraire.

Nous nous conformerons pour l'essentiel aux notations d'Arthur [A1, A2]. Les diverses troncatures utilisent la fonction $\widehat{\tau}_P$ qui pour $SL(2)$ ou $GL(2)$ est la fonction caractéristique des réels strictement positifs. La troncature dans [JL, pages 529-531] utilise une fonction notée $\chi(x)$ définie par une inégalité large dépendant d'une constante c_1 alors que, suivant les conventions d'Arthur, nous utilisons des inégalités strictes. Sans cette différence on aurait $\chi(x) = \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x) - X)$ pour $X = \log(c_1)$. Pour les corps de nombres on obtient les mêmes intégrales car la frontière est de mesure nulle ; ce n'est pas le cas pour un corps de fonctions.

Sauf mention expresse du contraire les mesures sur les groupes adéliques sont les mesures de Tamagawa. En particulier $\tau(G) = \tau(\widetilde{G}) = \tau(M) = \tau(U) = 1$. De plus $\tau(T_{E/F})$ est égal à 1 si $E = F \oplus F$ et égal à 2 si E est un corps.

4.2. **La troncature géométrique.** Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty\big(G(\mathbb{A}_F)\big)$. Le noyau de la formule des traces est

$$K(x,y) = \sum_{\gamma \in G(F)} f(x^{-1}\gamma y)$$

et on note $k(x)$ sa restriction à la diagonale $x = y$. Le noyau tronqué sur la diagonale est, pour $X \in \mathbb{R}$ [3].

$$k^X_{geom}(x) = k(x) - \sum_{\xi \in M(F)} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X) k_{P,\xi}(\gamma x)$$

où

$$k_{P,\xi}(x) = \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\xi u x)du \ .$$

On note $G(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments elliptiques dans $G(F)$ (réguliers ou non) et on pose

$$k_{ell}(x) = \sum_{\gamma \in G(F)_{ell}} f(x^{-1}\gamma x) \ .$$

On note

$$M(F)^\star = \{\xi \in M(F) \,|\, \xi \notin Z(F)\} \ .$$

3. Ce paramètre est usuellement noté T, en particulier chez Arthur. Il est ici noté X pour libérer la lettre T réservée aux tores.

l'ensemble des éléments réguliers du tore déployé maximal. Pour $\xi \in M(F)^\star$ on pose

$$k_\xi(x) = \sum_{\gamma \in M(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma^{-1}\xi\gamma x)$$

et

$$k^X_\xi(x) = k_\xi(x) - \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X)\big(k_{P,\xi}(\gamma x) + k_{P,\xi^{-1}}(\gamma x)\big)du \ .$$

Les éléments ξ et ξ^{-1} étant conjugués dans G sous le groupe de Weyl et toujours distincts on a donc

$$k_\xi(x) = k_{\xi^{-1}}(x) \qquad \text{et} \qquad k^X_\xi(x) = k^X_{\xi^{-1}}(x) \ .$$

C'est la contribution au noyau tronqué sur la diagonale de la classe de conjugaison de $\xi \in M(F)^\star$. La contribution des classes de conjugaison d'éléments hyperboliques c'est-à-dire des éléments semi-simples ayant des valeurs propres rationnelles distinctes est donc

$$k^X_{hyp}(x) = \sum_{\xi \in M(F)^\star/W} k^X_\xi(x) \ .$$

Enfin, on introduit [4]

$$k_{unip}(x) = \sum_{z \in Z(F)} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \sum_{\nu \in U(F)^\star} f(x^{-1}\gamma^{-1}z\nu\gamma x)$$

où $U(F)^\star$ est l'ensemble des éléments $\nu \in U(F)$ tels que $\nu \neq 1$. La contribution des classes de conjugaison des éléments de $G(F)$ produits d'un élément unipotent régulier par un élément du centre est donnée par

$$k^X_{unip}(x) = k_{unip}(x) - \sum_{z \in Z(F)} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X)k_{P,z}(\gamma x) \ .$$

La fonction $k^X_{geom}(x)$ se décompose en la somme des contributions elliptiques, hyperboliques et unipotentes :

$$k^X_{geom}(x) = k_{ell}(x) + k^X_{hyp}(x) + k^X_{unip}(x) \ .$$

Chaque terme fournit une intégrale sur

$$[G] = G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

qui est convergente. La convergence de l'intégrale de $k_{ell}(x)$ résulte de le finitude du nombre de classes de conjugaisons qui contribuent. La preuve de la convergence des intégrales des deux autres termes, au moins pour X assez grand, repose sur l'usage de la formule de

4. On prendra garde que notre définition de k_{unip} diffère de celle d'Arhur. D'une part, chez Arthur k_{unip} ne contient que la contributions des unipotents alors que, de plus, nous sommons sur le centre et il contient aussi la contribution de 1 qui est unipotent et elliptique et que nous avons rangé dans la contribution elliptique k_{ell}.

Poisson (voir le cas unipotent plus bas) et on renvoie à [LW] et [LLe] pour des preuves détaillées valables pour les groupes généraux en toute caractéristique. On pose :

$$J_\bullet^X(f) = \int_{[G]} k_\bullet^X(x)\, d\dot{x}$$

et on a

$$J_{geom}^X(f) = J_{ell}(f) + J_{hyp}^X(f) + J_{unip}^X(f) \ .$$

C'est le côté géométrique de la formule des traces non invariante. Pour X tendant vers l'infini ces expressions sont asymptotiques à des polynômes en X si F est un corps de nombres et à des élément de PolExp pour les corps de fonctions (cf. [LLe]). Il est usuel de remplacer ces expressions par leur polynôme asymptotique évalué en $X = 0$.

Contribution elliptique. L'intégrale orbitale adélique $\mathcal{O}(\gamma, f)$ de γ est l'intégrale

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \int_{I_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma x)\ d\dot{x}$$

où I_γ est le centralisateur de γ. On supposera que les mesures quotients sont définies au moyen des mesures de Tamagawa. Si f est décomposable i.e. $f = \otimes_v f_v$ on a une décomposition en produit d'intégrales orbitales locales ; toutefois il convient de tenir compte des facteurs qui servent à normaliser les mesures locales et globales permettant la convergence des produits. Pour les mesures de Tamagawa les facteurs de normalisation sont des fonctions L. En particulier :

Definition 4.2.1. *Soit E un corps quadratique sur F. Pour $\gamma \in T_{E/F}(F)$ régulier l'intégrale orbitale globale avec les mesures de Tamagawa s'écrit :*

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \int_{T_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(\widetilde{x}^{-1}\gamma\widetilde{x})d\widetilde{x} = L(1,\kappa)\prod_v \frac{\mathcal{O}_v(\gamma, f_v)}{L(1,\kappa_v)}$$

où $\kappa = \varepsilon_{E/F}$, les intégrales orbitales locales étant calculées au moyen des mesures de Tamagawa locales non normalisées.

La classe de conjugaison d'un γ elliptique contribue par le produit de son intégrale orbitale adélique multipliée par le nombre de Tamagawa $\tau(I_\gamma)$ du centralisateur :

$$J_{ell}(f) = \sum_{\gamma\in\Gamma_{ell}} \tau(I_\gamma)\mathcal{O}(\gamma, f)$$

où Γ_{ell} est un ensemble de représentants des classes de $G(F)$-conjugaison elliptiques. On peut regrouper les termes au moyen de la conjugaison stable sur F. Notons Σ_{ell} un ensemble de représentants des classes de conjugaison stables rationnelles elliptiques. Si on pose

$$\mathcal{D}(\gamma, F) := \widetilde{I}_\gamma(F)\backslash\widetilde{G}(F)/G(F)$$

on a

$$J_{ell}(f) = \sum_{\gamma\in\Sigma_{ell}} \tau(I_\gamma) \sum_{\delta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\delta^{-1}\gamma\delta, f) \ .$$

Pour $\gamma \in Z(F)$ l'ensemble $\mathcal{D}(\gamma, F)$ est trivial. Un γ elliptique régulier dans $G(F)$ engendre dans $M(2,F)$ une F-algèbre qui est une extension quadratique séparable E de F. Notons Σ_E un ensemble de représentants des classes de conjugaison stables d'éléments elliptiques réguliers attachés à la classe d'isomorphie de l'extension quadratique séparable non déployée E (cf. 1.1) et posons

$$J_E(f) = \tau(T_{E/F}) \sum_{\gamma\in\Sigma_E} \sum_{\delta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\delta^{-1}\gamma\delta, f) \ .$$

On a alors

$$J_{ell}(f) = \tau(G) \sum_{z\in Z(F)} f(z) + \sum_{E} J_E(f)$$

où E parcourt l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions quadratiques séparable de F.

Lemme 4.2.2. *En posant $E^\star = E^1 - \{\pm 1\}$ où E^1 est le sous-groupe des éléments de norme 1 on a*

$$J_E(f) = \frac{\tau(T_{E/F})}{2} \sum_{\gamma\in E^\star} \sum_{\delta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\delta^{-1}\gamma\delta, f) \ .$$

Démonstration. Le facteur 1/2 résulte de ce que dans $E^\star$ les éléments γ et γ^{-1} sont toujours stablement conjugués mais distincts. □

Contribution hyperbolique. On observe que pour $\xi \in M(F)^\star$ on a

$$\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F)} \sum_{\nu\in U(F)} f(x^{-1}u^{-1}\xi\nu ux)du = \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}u^{-1}\xi ux)du$$

et

$$k_{P,\xi}(x) = \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\xi ux)du = \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}u^{-1}\xi ux)du \ .$$

On introduit l'expression

$$h_\xi(x,X) = \Big(\sum_{\nu\in U(F)} f(x^{-1}\xi\nu x)\Big) - \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x) - X)\Big(k_{P,\xi}(x) + k_{P,\xi^{-1}}(x)\Big)$$

on voit alors que

$$k_\xi^X(x) = \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} h_\xi(\gamma x, X)$$

et on pose

$$J_\xi^X(f) = \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} h_\xi(x,X)\,dx \ .$$

On en déduit que pour $\xi \in M(F)^\star$

$$J_\xi^X(f) = \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} h_\xi(x,X)dx = \int_{M(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\xi x)\eta(x,X)dx$$

où, en notant w l'élément non trivial du groupe de Weyl, on a posé

$$\eta(x,X)=1-\widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x)-X)-\widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(wx)-X)\ .$$

On observe que si $x=muk$ est une décomposition d'Iwasawa

$$\mathbf{H}_P(x)=\mathbf{H}_P(m)\quad\text{et}\quad\mathbf{H}_P(wx)=\mathbf{H}_P(wu)-\mathbf{H}_P(m)$$

On a

$$\eta(x,X)=1\quad\text{si}\quad\mathbf{H}_P(wu)-X\leq\mathbf{H}_P(m)\leq X$$

ainsi que

$$\eta(x,X)=-1\quad\text{si}\quad X<\mathbf{H}_P(m)<\mathbf{H}_P(wu)-X$$

et $\eta(x,X)=0$ sinon. On en déduit que pour u et X fixés la fonction $m\mapsto\eta(muk,X)$ est à support compact. On note $M(\mathbb{A}_F)^1$ le groupe des $m\in M(\mathbb{A}_F)$ avec $\mathbf{H}_P(m)=0$. On normalise la mesure de Haar en imposant la mesure de Lebesgue (resp. la mesure de comptage) sur $M(\mathbb{A}_F)^1\backslash M(\mathbb{A}_F)$ pour les corps de nombres (resp. les corps de fonctions) et $\mathrm{vol}\big(M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)^1\big)=1$. On pose

$$\boldsymbol{\eta}(x,X)=\int_{M(\mathbb{A}_F)^1\backslash M(\mathbb{A}_F)}\eta(mx,X)dm$$

et

$$J_\xi^X(f)=\int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)}f(x^{-1}\xi x)\boldsymbol{\eta}(x,X)dx\ .$$

Il est usuel de ne considérer que la valeur en $X=0$: on pose $\boldsymbol{\eta}(x)=\boldsymbol{\eta}(x,0)$ et

$$J_\xi(f)=\int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)}f(x^{-1}\xi x)\boldsymbol{\eta}(x)dx\ .$$

Si $wu=m_1u'k_1$ on a $\mathbf{H}_P(wu)=\mathbf{H}_P(m_1)$. On voit alors que si F est un corps de nombres

$$\boldsymbol{\eta}(x)=-\mathbf{H}_P(wu)=\log_{q_F}\big(||(1,n)||\big)\quad\text{si}\quad x=muk\ .$$

Pour les corps de fonctions on a

$$\boldsymbol{\eta}(x)=1-\mathbf{H}_P(wu)=1+\log_{q_F}\big(||(1,n)||\big)\ .$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul explicite des PolExp lorsque X est rationnel (Voir l'appendice C).

La distribution $J_\xi(f)$ est une intégrale orbitale pondérée globale. Puisque $\mathbf{H}_P$ est un logarithme on a pour les corps de nombres (et à un décalage près pour les corps de fonctions)

$$\boldsymbol{\eta}(x)=\sum_v\boldsymbol{\eta}_v(x_v)$$

et l'intégrale est une somme sur toutes les places v de produits d'objets locaux à savoir des intégrales orbitales locales ordinaires aux places $v'\neq v$ et pondérée en v.

La contribution des classes de conjugaison hyperboliques est donnée par

$$J_{hyp}^X(f)=\int_{[G]}k_{hyp}^X(x)dx=\sum_{\xi\in M(F)^\star/W}J_\xi^X(f)=\frac{1}{2}\sum_{\xi\in M(F)^\star}J_\xi^X(f)\ .$$

Contributions unipotentes. On pose

$$\Phi^X_{unip}(f,x,z) = \Big(\sum_{\nu\in U(F)^\star} f(x^{-1}z\nu x)\Big) - \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x)-X)\int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}zux)\,du$$

et

$$f^K(x) = \int_K f(k^{-1}xk)\,dk \ .$$

Par définition,

$$J^X_{unip}(f) = \sum_{z\in Z(F)} J^X_{unip}(f,z) \quad \text{où} \quad J^X_{unip}(f,z) = \int_{M(F)U(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \Phi^X_{unip}(f,x,z)\,dx \ .$$

En décomposant x sous la forme $x = muk$ on voit que

$$J^X_{unip}(f,z) = \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)} \Phi^X_{unip}(f^K,m,z)\delta_P(m)^{-1}\,dm \ .$$

On pose

$$g(n,z) = \int_K f\Big(k^{-1}z\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\Big)dk = f^K\Big(z\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big)$$

ainsi que

$$m = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nu = \begin{pmatrix}1 & \xi\\ 0 & 1\end{pmatrix} \ .$$

Avec ces notations on a $\delta_P(m) = |a|^2$ et

$$\Phi^X_{unip}(f^K,m,z) = \Big(\sum_{\xi\in F^\times} g(a^{-2}\xi,z)\Big) - \widehat{\tau}_P\big(\log_{q_F}|a| - X\big)\int_{\mathbb{A}_F} g(a^{-2}n,z)dn \ .$$

Considérons les intégrales, portant sur des sous-ensembles du groupe C_F des classes d'idèles, la mesure sur ce groupe étant notée $d^\times a$:

$$A^X(f,z) = \int_{|a|\geq q_F^{-X}} \Big(\sum_{\xi\in F^\times} g(a^2\xi,z)\Big)|a|^2\,d^\times a$$

et

$$B^X(f,z) = \int_{|a|< q_F^{-X}} \left(\sum_{\xi\in F^\times} g(a^2\xi,z) - \int_{\mathbb{A}_F} g(a^2n,z)dn\right)|a|^2\,d^\times a \ .$$

Lemme 4.2.3.

$$J^X_{unip}(f,z) = A^X(f,z) + B^X(f,z) \ .$$

Démonstration. La convergence de la première intégrale résulte de la compacité du support de g. La convergence de la seconde intégrale est prouvée en faisant appel aux techniques mises en œuvre dans la thèse de Tate (voir appendice B) et qui reposent sur l'usage de la formule de Poisson. $\square$

Pour $X \geq 0$ on pose $v_F(X) = X$ pour les corps de nombres et pour les corps de fonctions on pose $v_F(X) = E(X)$ la partie entière de X, faisant ainsi apparaître des PolExp lorsque X est rationnel (Voir l'appendice C). On a alors

$$J^X_{unip}(f,z) = A^0(f,z) + B^0(f,z) + \Big(\int_{\mathbb{A}_F} g(n,z)dn \Big) v_F(X) \ .$$

Une formule plus explicite pour $J_{unip}(f)$ sera donnée au moyen de la pré-stabilisation.

4.3. **Troncatures et identité fondamentale.** La troncature spectrale repose sur l'opérateur de troncature d'Arthur Λ^X qui généralise la troncature des séries d'Eisenstein due à Selberg et Langlands. Pour $SL(2)$ et une fonction φ sur $[G]$ l'opérateur de troncature s'écrit :

$$\Lambda^X \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \int_{u \in [U]} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X)\varphi(u\gamma x)du \ .$$

C'est un projecteur orthogonal dans l'espace de Hilbert $L^2([G])$ qui agit trivialement sur le sous-espace des fonctions cuspidales. Une troncature compatible avec la décomposition spectrale, est obtenue en faisant agir l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^X$ sur la première variable du noyau $K(x,y)$:

$$K^X_{spec}(x,y) = K(x,y) \ - \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \int_{u \in [U]} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X)K(u\gamma x, y)du \ .$$

On considère alors sa restriction à la diagonale :

$$k^X_{spec}(x) = K^X_{spec}(x,x) \ .$$

Proposition 4.3.1. *Pour X assez grand (dépendant du support de f) on a*

$$k^X_{geom}(x) = k^X_{spec}(x) \ .$$

Démonstration. On doit montrer que pour X assez grand

$$\sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \sum_{\xi \in M(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X) \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma^{-1}u\xi\gamma x)du \ .$$

est égal à

$$\sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \sum_{\delta \in U(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X) \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma^{-1}u\delta x)du$$

qui peut s'écrire

$$\sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \sum_{\delta' \in U(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma x) - X) \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma^{-1}u\delta'\gamma x)du \ .$$

Il suffit alors d'observer que

$$\widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x) - X) f(x^{-1}u\delta' x) = 0$$

sauf peut-être pour $\delta' \in P(F)$ si X est assez grand. □

Remarque 4.3.2. Nous avons utilisé une troncature spectrale simple : la restriction à la diagonale du noyau avec troncature sur la première variable. Dans le *Morning Seminar* (cf. [LW]) on a introduit une troncature spectrale plus compliquée, qui elle a l'avantage de donner lieu à une égalité pour toutes les valeurs de X et qui est vraie plus généralement pour les espaces tordus [LW, Proposition 8.2.2]. Dans le cas non tordu la troncature spectrale simple donne une égalité pour X assez grand qui n'est pas vraie dans le cas tordu le plus général (voir [LW, Proposition 10.3.4]).

4.4. **Décomposition spectrale.** Nous aurons besoin de la décomposition spectrale de la représentation régulière droite ρ dans l'espace de Hilbert $L^2([G])$ où $[G] = G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. On note $L^2_{cusp}([G])$ l'adhérence de l'espace des fonctions φ lisses et cuspidales c'est-à-dire telles que φ^0, le *terme constant le long de* P, est nul :

$$\varphi^0(x) := \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F)} \varphi(ux)du = 0 \ .$$

On note $L^2_P([G])$ est l'adhérence de l'espace des fonctions de la forme

$$\theta_\phi(x) = \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma x)$$

où ϕ est une fonction lisse à support compact sur $U(\mathbb{A}_F)P(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. On a une première décomposition

$$L^2([G]) = L^2_{cusp}([G]) \oplus L^2_P([G]) \ .$$

En effet si φ est orthogonale à toutes les fonctions θ_ϕ alors φ est cuspidale car

$$\int_{[G]} f(x)\theta_\phi(x)dx = \int_{U(\mathbb{A}_F)P(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \varphi^0(x)\phi(x)\ d\dot{x} \ .$$

Si λ est un caractère (non nécessairement unitaire) de $M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)$ prolongé à $P(\mathbb{A}_F)$ trivialement sur $U(\mathbb{A}_F)$ on note V_λ l'espace des fonction Φ qui vérifient

$$\Phi(muk,\lambda) = m^{\lambda+r}\Phi(k,\lambda)$$

où $m^r = \delta_P(m)^{1/2}$ et dont la restriction à K est dans $L^2(K)$. C'est l'espace de la représentation de la série principale adèlique π_λ c'est-à-dire de l'induite parabolique du caractère λ, le groupe agissant par translations à droite :

$$\big(\pi_\lambda(g)\Phi\big)(x,\lambda) = \Phi(xg,\lambda) \ .$$

On analyse le spectre de $L^2_P([G])$ grâce aux séries d'Eisenstein E_λ

$$E_\lambda(x,\Phi) = \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} \Phi(\gamma x,\lambda) \qquad \text{pour} \qquad \Phi\in V_\lambda \ .$$

Les séries d'Eisenstein définissent, au moins formellement, des opérateurs d'entrelacements entre l'espace V_λ et l'espace des formes automorphes. Mais ces séries ne convergent pas pour les valeurs utiles du paramètre λ et un prolongement méromorphe est nécessaire pour montrer que $L^2_P([G])$ se décompose en la somme d'un spectre résiduel et d'un spectre continu :

$$L^2_P([G]) = L^2_{res}([G]) \oplus L^2_{cont}([G])$$

Le spectre résiduel $L^2_{res}([G])$ pour $G = SL(2)$ est de dimension 1 : il se réduit à la représentation triviale. Le spectre discret est la somme du spectre cuspidal, du spectre résiduel :

$$L^2_{disc}([G]) = L^2_{cusp}([G]) \oplus L^2_{res}([G]) \ .$$

Le spectre continu peut écrire formellement

$$L^2_{cont}([G]) = \frac{1}{2}\int_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus} V_\lambda \ d\lambda$$

où Λ est le dual de Pontryagin de $M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)$. La présence du facteur $1/2$ vient de ce que les représentations π_λ et $\pi_{w\lambda}$ sont équivalentes. De façon plus explicite un élément $\varphi \in L^2_{cont}([G])$ peut s'écrire (encore formellement)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_\Lambda \sum_{\Phi\in\mathcal{B}_\lambda} \langle\varphi, E_\lambda(\bullet,\Phi)\rangle_{[G]} E_\lambda(x,\Phi)\, d\lambda$$

où $\mathcal{B}_\lambda$ est une base orthonormale de V_λ. Nous renvoyons à la littérature pour un traitement rigoureux de ce qui précède.

4.5. **Le côté spectral de la formule des traces.** L'opérateur de troncature opère trivialement sur le spectre cuspidal. On a donc une décomposition

$$K^X_{spec}(x,y) = K_{cusp}(x,y) + K^X_{res}(x,y) + K^X_{cont}(x,y) \ .$$

Le côté spectral de la formule des traces est donné par l'intégrale sur $[G]$ du noyau K^X_{spec} restreint à la diagonale :

$$J^X_{spec}(f) := \int_{[G]} k^X_{spec}(x)dx \quad \text{où} \quad k^X_{spec}(x) = K^X_{spec}(x,x)$$

et on a

$$J^X_{spec}(f) := J_{cusp}(f) + J^X_{res}(f) + J^X_{cont}(f) \ .$$

L'opérateur $K_{cusp}(x,y)$ est un opérateur à trace. On obtient donc

$$J_{cusp}(f) = \text{trace}\,\rho_{cusp}(f) = \sum_\pi m_{cusp}(\pi)\text{trace}\,\pi(f)$$

où $m_{cusp}(\pi)$ est la multiplicité de π dans le spectre cuspidal. La partie résiduelle fournit l'intégrale de $\Lambda^X f$ sur le domaine fondamental :

$$J^X_{res}(f) = \frac{1}{\text{vol}\,([G])}\int_{[G]} \Lambda^X \mathbf{1} \ d\dot{x} \int_{G(F)} f(x)\,dx \ .$$

Il reste à calculer l'intégrale

$$\int_{[G]} k^X_{cont}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{[G]}\int_\Lambda \sum_{\Phi\in\mathcal{B}_\lambda} \Lambda^X E_\lambda(\pi_\lambda(f)\Phi, x)\overline{E_\lambda(x,\Phi)}\, d\lambda \ d\dot{x} \ .$$

Pour obtenir des formules explicites il faut inverser l'ordre des intégrations. Pour les corps de fonctions la compacité du dual d'un réseau rend la preuve aisée ; c'est plus délicat pour les corps de nombres. On trouvera dans [LW] et [LLe] des preuves valables pour des groupes généraux en toute caractéristique. Nous esquissons les arguments pour les corps de nombres. Le cas des corps de fonction se traite de façon analogue et ne présente aucune difficulté supplémentaire autre que de notation. (voir [LLe]).

Pour les corps de nombres si $\lambda = sr + \chi$ avec χ unitaire trivial sur $\mathbb{R}_+^\times$ vu comme sous-groupe de $M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)$ et $\Re(s) > 0$ on pose

$$\varepsilon(\lambda) = \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(m)) m^{-\lambda}\, dm \ .$$

Cette fonction est nulle si χ est non trivial sur $M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)^1$. Si χ est trivial elle vaut $1/s$. La formulation pour les corps de fonctions est laissée au lecteur (cf. [LLe]). On introduit, avec des notations analogues à celles de [LW],

$$\omega^X(\lambda,\mu) = \sum_{\boldsymbol{s}} \sum_{\boldsymbol{t}} q_F^{\langle \boldsymbol{s}\lambda - \boldsymbol{t}\mu, X\rangle} \varepsilon(\boldsymbol{s}\lambda - \boldsymbol{t}\mu) \mathbf{M}(\boldsymbol{t},\mu)^{-1}\mathbf{M}(\boldsymbol{s},\lambda)$$

les sommes en $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ portant sur le groupe de Weyl pour le tore déployé. On observera que $\varepsilon(\boldsymbol{s}\lambda - \boldsymbol{t}\mu)$ est nul si $(\boldsymbol{s}\chi - \boldsymbol{t}\chi) \neq 0$.

Lemme 4.5.1.

$$\int_{[G]} \Lambda^X E_\lambda(x, \pi_\lambda(f)\Phi)\overline{E_{-\overline{\mu}}(x,\Phi)}\, d\dot{x} = \left\langle \omega^X(\lambda,\mu)\pi_\lambda(f)\Phi, \Phi\right\rangle_K$$

On a alors

$$J^X_{cont}(f) = \frac{1}{2}\int_\Lambda \operatorname{trace}\big(\lim_{\mu\to\lambda} \omega^X(\lambda,\mu)\pi_\lambda(f)\big)\, d\lambda \ .$$

Démonstration. On note E^0_λ le "terme constant" de E_λ :

$$E^0_\lambda(x,\Phi) = \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F)} E_\lambda(ux,\Phi)\, du$$

et on rappelle que

$$E^0_\lambda(x,\Phi) = \Phi(x,\lambda) + \big(\mathbf{M}(\boldsymbol{s},\lambda)\Phi\big)(x,\boldsymbol{s}\lambda) \ .$$

On commence par calculer le produit scalaire

$$A(\lambda,\mu) := \int_{[G]} \Lambda^X E_\lambda(x,\pi_\lambda(f)\Phi)\overline{E_{-\overline{\mu}}(x,\Phi)}\, d\dot{x}$$

pour des valeurs des paramètres pour lesquelles les séries :

$$E_\lambda(x,\Phi) = \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} \Phi(\gamma x, \lambda)$$

convergent. On observe que dans ce cas $\Lambda^X E_\lambda(x,\pi_\lambda(f)\Phi)$ est donné par la série

$$\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} B(\gamma x, \pi_\lambda(f)\Phi, \lambda)$$

où

$$B(x,\Phi,\lambda)=\Phi(x,\lambda)-\widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x)-X)\big(\Phi(x,\lambda)+\big(\mathbf{M}(\boldsymbol{s},\lambda)\Phi\big)(x,\boldsymbol{s}\lambda)\big)$$

et donc

$$A(\lambda,\mu)=\int_{P(F)U(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} B(x,\pi_\lambda(f)\Phi,\lambda)\overline{E^0_{-\overline{\mu}}(x,\Phi)}\,d\dot{x}$$

et on obtient

$$A(\lambda,\mu)=\big\langle\omega^X(\lambda,\mu)\pi_\lambda(f)\Phi,\Phi\big\rangle_K\ .$$

□

On doit maintenant passer à la limite lorsque μ tend vers λ. Explicitons cette limite pour les corps de nombres. Supposons que λ est unitaire de la forme

$$m^\lambda=m^{sr+\chi}\quad\text{où}\quad m^r=|m^\alpha|^{1/2}$$

et où χ est trivial sur $\mathbb{R}_+^\times$ identifié à un sous groupe de C_F. Soit w l'élément non trivial du groupe de Weyl, on notera $\mathbf{M}'(w,\lambda)$ la dérivée de $\mathbf{M}(w,\lambda)$ par rapport à s et on pose

$$\mathcal{M}(\lambda)=\mathbf{M}(w,\lambda)^{-1}\mathbf{M}'(w,\lambda)\ .$$

Enfin on pose $\delta(\lambda)=1$ si la restriction de λ à $M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F)^1$ est triviale et et $\delta(\lambda)=0$ sinon. Avec ces notations on obtient l'expression suivante :

$$\omega^X(\lambda,\lambda)=c\,X-\mathcal{M}(\lambda)+\delta(2\lambda)\frac{\sin s\langle X,Y\rangle}{s}\mathbf{M}(w,\lambda)$$

où c et Y sont des constantes. Les deux premiers termes donnent, pour les corps de nombres, par intégration en λ un polynôme du premier degré en X :

$$J^X_{cont}(f)=\frac{c}{2}\Big(\int_\Lambda \operatorname{trace}\pi_\lambda(f)\,d\lambda\Big)\,X-\frac{1}{2}\int_\Lambda\operatorname{trace}\Big(\mathcal{M}(\lambda)\pi_\lambda(f)\Big)\,d\lambda\ .$$

Le troisième terme donne, par intégration en λ, une expression $J^X_{compl}(f)$ qui est une somme d'intégrales oscillantes en s indexées par les caractères d'ordre 2. Lorsque le paramètre de troncature tend vers l'infini l'intégrale oscillante tend, à un facteur scalaire près, vers la mesure de Dirac et on obtient à la limite le

Lemme 4.5.2. *Si F est un corps de nombres*

$$\frac{1}{2}\sum_\chi\delta(2\chi)\lim_{X\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{2\sin s\langle X,Y\rangle}{2s}\mathbf{M}(w,sr+\chi)\pi_{sr+\chi}(f)\frac{ds}{2\pi}$$

est égal à

$$\frac{1}{4}\sum_{\{\lambda\,|\,2\lambda=0\}}\mathbf{M}(w,\lambda)\pi_\lambda(f)\ .$$

Démonstration. En effet, pour h lisse et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h(x)\,\frac{2\sin Nx}{x}\,\frac{dx}{2\pi}=h(0)\ .$$

□

On a une formule analogue pour les corps de fonctions. Au total on a

$$\int_{[G]} k^X_{cont}(x)\,d\dot{x} = J^X_{cont}(f) + J^X_{compl}(f)\ .$$

L'expression spectrale se décompose donc en une partie discrète et une partie continue :

$$J^X_{spec}(f) = J^X_{disc}(f) + J^X_{cont}(f)$$

et la partie discrète $J^X_{disc}(f)$ est somme de trois termes :

$$J^X_{disc}(f) = J_{cusp}(f) + J^X_{res}(f) + J^X_{compl}(f)\ .$$

Les deux derniers termes ont une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$ et en fait $J^X_{disc}(f)$ est indépendant de X. On pose

$$J_{res}(f) = \lim_{X\to\infty} J^X_{res}(f) \quad \text{et} \quad J_{compl}(f) = \lim_{X\to\infty} J^X_{compl}(f)$$

et on a

$$J_{disc}(f) = J_{cusp}(f) + J_{res}(f) + J_{compl}(f) = \sum_{\pi} a(\pi)\text{trace}\,\pi(f)$$

où les $a(\pi)$ sont des nombres rationnels. La distribution J_{disc}, qui est une combinaison linéaire de traces, est donc invariante par conjugaison de f sous $G(\mathbb{A}_F)$. Les deux premiers termes correspondent à la trace de l'opérateur $\rho_{disc}(f)$ défini par f dans le spectre discret $L^2_{disc}([G])$:

$$\text{trace}\,\rho_{disc}(f) = \text{trace}\,\rho_{cusp}(f) + \text{trace}\,\rho_{res}(f) = J_{cusp}(f) + J_{res}(f)\ .$$

Pour π dans le spectre discret $a(\pi) = m(\pi)$ la multiplicité de π dans le spectre ; ce sont des entiers positifs [5]. En particulier

$$J_{res}(f) = \text{trace}\,\rho_{res}(f) = \text{trace}\,\mathbf{1}(f) = \int_{[G]} f(x)\,d\dot{x}\ .$$

Les contributions discrètes provenant de la troncature du spectre continu donnent le terme complémentaire $J_{compl}(f)$ pour lequel les $a(\pi)$ ne sont plus nécessairement des entiers positifs. De fait à la limite on a vu en 4.5.2 que

$$J_{compl}(f) = \sum_{\{\lambda\,|\,2\lambda=0\}} \frac{1}{4}\,\text{trace}\,\big(\mathbf{M}(w,\lambda)\pi_\lambda(f)\big)$$

où on somme sur les caractères λ d'ordre 2 de $M(F)\backslash M(\mathbb{A}_F) \simeq C_F$.[(6)] Si $\lambda = 0$ la série principale π_λ est irréductible et l'opérateur d'entrelacement $\mathbf{M}(w,0)$ est le scalaire -1 :

$$\text{trace}\,\big(\mathbf{M}(w,0)\pi_1(f)\big) = -\text{trace}\,\big(\pi_0(f)\big)\ .$$

5. Il a été démontré [R] que la multiplicité est toujours 1. Mais nous n'utiliserons pas ce fait.

6. Si on compare avec [LW] on voit que le scalaire $1/4$ est l'inverse du produit du cardinal $\#W$ du groupe de Weyl W et de la valeur absolue du déterminant de $(1-w)$ agissant dans l'espace vectoriel réel $\mathfrak{a}_M$ attaché à M : $\#W.|\det(1-w)| = 4$.

On a donc $a(\pi_0) = -1/4$. Si $\lambda \neq 0$ la représentation π_λ se décompose en une somme infinie de représentations irréductibles deux à deux inéquivalentes qui peuvent se regrouper en deux sous-représentations :

$$\pi_\lambda = \pi_\lambda^+ \oplus \pi_\lambda^-$$

où π_λ^+ est la somme des composants admettant un modèle de Whittaker pour un caractère ψ de $U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F)$ localement partout sauf en un nombre pair de places. Cette parité est indépendante du choix de ψ. Il résulte de 3.6.1, par produit sur toutes les places, que

$$\text{trace}\left(\mathbf{M}(w,\lambda)\pi_\lambda(f)\right) = \text{trace}\,\pi_\lambda^+(f) - \text{trace}\,\pi_\lambda^-(f)$$

et donc $a(\pi) = \pm 1/4$ si π est un composant de $\pi_\lambda^\pm$.

4.6. **Les formules des traces.** On rappelle que, d'après 4.3.1, pour X assez grand (dépendant du support de f) on a

$$k_{geom}^X(x) = k_{spec}^X(x) \ .$$

On obtient par intgration sur $[G]$ la formule des traces non invariante :

Proposition 4.6.1. *Pour X assez grand on a l'identité :*

$$J_{ell}(f) + J_{hyp}^X(f) + J_{unip}^X(f) = J_{disc}(f) + J_{cont}^X(f) \ .$$

Le terme elliptique $J_{ell}(f)$ et le terme spectral discret $J_{disc}(f)$ sont des distributions invariantes par conjugaison de f c'est-à-dire en remplaçant

$$f : g \mapsto f(g) \qquad \text{par} \qquad f^x : g \mapsto f(x^{-1}gx) \ .$$

Les autres termes de formule des traces ne sont pas invariants sous une telle conjugaison : ils dépendent du choix du compact maximal K et du sous-groupe parabolique minimal P.

5. Pré-stabilisation

5.1. **La méthode.** On va étendre chaque terme du développement de $k^X_{geom}(x)$ et de $k^X_{spec}(x)$ en une fonction sur

$$[\widetilde{G}] = \widetilde{G}(F)\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)\ .$$

Ce sont ces fonctions que l'on souhaite analyser : en effet on sait que la conjugaison sous $GL(2)$ équivaut à la conjugaison stable pour $SL(2)$. La transformation de Fourier sur

$$Q_F \simeq G(\mathbb{A}_F)\widetilde{G}(F)\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$$

fournira la pré-stabilisation. On observe tout d'abord que

$$k(\widetilde{x}) = \sum_{\gamma\in G(F)} f(\widetilde{x}^{-1}\gamma\widetilde{x})$$

a un sens pour $\widetilde{x} \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ puisque $\det(\widetilde{x}^{-1}\gamma\widetilde{x}) = 1$ et que $k(\eta\widetilde{x}) = k(\widetilde{x})$ pour tout $\eta \in \widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{G}(F)$. On a ainsi défini une fonction sur

$$[\widetilde{G}] = \widetilde{G}(F)\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)\ .$$

Nous allons montrer qu'il en est de même pour tous les $k^X_\bullet(x)$:

Lemme 5.1.1. *Les fonctions*

$$x \mapsto k^X_\bullet(x)$$

sont invariantes à gauche par $\widetilde{G}(F)\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)$.

Démonstration. L'invariance sous $\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)$ est évidente. On sait déjà que ces fonctions sont invariantes à gauche par $G(F)$. Il suffit donc de prouver l'invariance par les $\xi \in \widetilde{M}(F)$. Mais de tels ξ normalisent $P(F)$ et $G(F)$ et donc laissent invariantes les troncatures. □

Par intégration sur $[\widetilde{G}]$ contre un caractère κ de Q_F on définit des distributions

$$J^X_\bullet(f,\kappa) = \int_{[\widetilde{G}]} \kappa(\det\widetilde{x})k^X_\bullet(\widetilde{x})\,d\dot{x}$$

et on a, si Q_F est muni de la mesure de Haar lui donnant le volume 1,

$$J^X_\bullet(f) = \sum_\kappa J^X_\bullet(f,\kappa)\ .$$

C'est ce que nous appellerons la pré-stabilisation de la formule des traces pour $G = SL(2)$ Nous étudions tous les termes plus en détail ci-dessous.

On rappelle que pour X assez grand (dépendant du support de f) on a d'après 4.3.1

$$k^X_{geom}(x) = k^X_{spec}(x)$$

et on voit de même que

$$k^X_{geom}(\widetilde{x}) = k^X_{spec}(\widetilde{x})\ .$$

On en déduit que pour tout κ une identité que nous allons expliciter.

$$J^X_{geom}(f,\kappa) = J^X_{spec}(f,\kappa)\ .$$

5.2. **Contributions elliptiques.** Soit E/F une extension quadratique séparable. On note $\varepsilon_{E/F}$ le caractère de C_F associé à E/F par la théorie du corps de classe ; c'est de façon naturelle un caractère de Q_F. On note $\widetilde{T}_{E/F}$ le tore défini par la restriction des scalaire à la Weil pour E/F du groupe multiplicatif $E^\times$ et $T_{E/F}$ le sous tore des éléments de norme 1 :

$$\widetilde{T}_{E/F}(F) = E^\times \qquad \text{et} \qquad T_{E/F}(F) = E^1$$

où E^1 est le noyau de la norme

$$N_{E/F} : E^\times \to F^\times \ .$$

On peut réaliser $T_{E/F}$ comme un sous-groupe de G et $\widetilde{T}_{E/F}$ comme un sous-groupe de $\widetilde{G}$. Les intégrales orbitales qui interviennent dans l'expression $J_E(f,\kappa)$ qui est la contribution des termes elliptiques réguliers relatif à l'extensions quadratique non déployée E/F qui ont en facteur l'intégrale de κ de l'image par le déterminant de

$$\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{T}_{E/F}(F)\backslash\widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F) = \mathbb{A}_F^\times E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times \simeq C_F\backslash C_E \ .$$

Cette intégrale est nulle sauf si κ est constant sur $N_{E/F}(C_E)$ c'est-à-dire si $\kappa = 1$ ou $\kappa = \varepsilon_{E/F}$. On a donc

$$J_E(f) = J_E(f,1) + J_E(f,\varepsilon_{E/F}) \ .$$

On a défini en 4.2.1 une intégrale orbitale globale pour $\gamma \in T_{E/F}(F)$ régulier en posant

$$\mathcal{O}(\gamma,f) = \int_{T_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(\widetilde{x}^{-1}\gamma\widetilde{x})d\widetilde{x} = L(1,\kappa)\prod_v \frac{\mathcal{O}_v(\gamma,f_v)}{L(1,\kappa_v)}$$

où $\kappa = \varepsilon_{E/F}$. Les mesures utilisées pour le calcul des intégrales orbitales locales $\mathcal{O}_v(\gamma,f_v)$ sont les quotients de mesures de Tamagawa locales non normalisées sur T_v et G_v. On peut maintenant définir une intégrale κ-orbitale globale en posant

$$\mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(\gamma,f) = \sum_{\eta\in\mathcal{D}(\gamma,\mathbb{A}_F)} \varepsilon_{E/F}(\det(\eta))\mathcal{O}(\eta^{-1}\gamma\eta,f)$$

où

$$\mathcal{D}(\gamma,\mathbb{A}_F) = \widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F)G(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F) \ .$$

Mais ce groupe est la limite inductive sur la famille des ensembles finis S de places :

$$\mathcal{D}(\gamma,\mathbb{A}_F) = \lim_{\to}\mathcal{D}(\gamma,F_S) \quad \text{où} \quad \mathcal{D}(\gamma,F_S) = \prod_{v\in S}\mathcal{D}(\gamma,F_v)$$

et si on utilise les mesure locales comme ci-dessus on a

$$\mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(\gamma,f) = \int_{\widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)} \kappa(x)f(x^{-1}\gamma x)\,d\dot{x} = L(1,\kappa)\prod_v \frac{\mathcal{O}_v^{\kappa_v}(\gamma,f_v)}{L(1,\kappa_v)} \ .$$

Remarque 5.2.1. Dans [LL] le facteur de transfert est intégré dans la définition des κ-intégrales orbitales locales $\mathcal{O}^{\kappa_v}(\gamma,f_v)$.

Lemme 5.2.2. *Pour $\gamma \in E^\star$ on a l'identité*

$$\sum_{\eta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\eta^{-1}\gamma\eta, f) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa} \mathcal{O}^\kappa(\gamma, f) \ .$$

Démonstration. On rappelle que $\mathcal{D}(\gamma, F) \simeq N_{E/F}E^\times\backslash F^\times$. Maintenant

$$\widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F) \simeq \widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)^+ \cup \widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)^+\eta$$

où

$$\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)^+ = \{x \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F) \mid \det(x) \in F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times\} \quad \text{et} \quad \det(\eta) \notin F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \ .$$

Par ailleurs, si on pose

$$G(\mathbb{A}_F)^+ = \{x \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F) \mid \det(x) \in F^\times\}$$

en utilisant que $F^\times \cap N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times = N_{E/F}E^\times$ (principe de Hasse valable pour les extensions quadratiques) on voit que

$$E^\times T_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)^+ \simeq \widetilde{T}_{E/F}(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)^+ \ .$$

La formule de Poisson pour le groupe discret $\mathcal{D}(\gamma, F)$ vu comme sous-groupe d'indice 2 de

$$\mathcal{D}(\gamma, \mathbb{A}_F) \simeq N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$$

montre alors que

$$\sum_{\eta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\eta^{-1}\gamma\eta, f) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa} \mathcal{O}^\kappa(\gamma, f) \ .$$

□

Remarque 5.2.3. On aurait pu utiliser le résultat plus général [Lab2, Théorème 3.9] qui, dans notre cas, affirme que

$$\tau(T_{E/F}) \sum_{\eta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\eta^{-1}\gamma\eta, f) = \tau(G)\sum_{\kappa} \mathcal{O}^\kappa(\gamma, f)$$

et on sait que $\tau(T_{E/F}) = 2$ et $\tau(G) = 1$.

Corollaire 5.2.4. *On suppose les κ-intégrales orbitales calculées au moyen du quotient des mesures de Tamagawa. Alors*

$$J_E(f, \varepsilon_{E/F}) = \frac{\tau(T_{E/F})}{4} \sum_{\gamma\in E^\star} \mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(\gamma, f) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in E^\star} \mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(\gamma, f) \ .$$

Démonstration. D'après 4.2.2,

$$J_E(f) = \frac{\tau(T_{E/F})}{2} \sum_{\gamma\in E^\star}\sum_{\eta\in\mathcal{D}(\gamma,F)} \mathcal{O}(\eta^{-1}\gamma\eta, f) \ .$$

Il suffit alors d'invoquer 5.2.2 □

5.3. **Contributions hyperboliques.** Le calcul de la contribution hyperbolique fait ci-dessus fournit l'expression suivante :

$$J_\xi^X(f) = \sum_\kappa J_\xi^X(f,\kappa)$$

avec

$$J_\xi^X(f,\kappa) = \int_{\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)} f(\widetilde{x}^{-1}\xi\widetilde{x})\eta(\widetilde{x},X)\kappa(x)d\widetilde{x}$$

Lemme 5.3.1. *Pour* $m \in M(\mathbb{A}_F)$

$$J_m^X(f,\kappa) = \int_{\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)} f(\widetilde{x}^{-1}m\widetilde{x})\eta(\widetilde{x},X)\kappa(x)d\widetilde{x} = 0$$

si κ *est non trivial.*

Démonstration. En effet,

$$\widetilde{m}_1 \mapsto f(\widetilde{x}^{-1}\widetilde{m}_1^{-1}m\widetilde{m}_1\widetilde{x})\eta(\widetilde{m}_1 x,X)$$

est constant pour $\widetilde{m}_1 \in \widetilde{M}(\mathbb{A}_F)$ et donc l'intégrale sur $\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)\backslash\widetilde{M}(\mathbb{A}_F)$ est nulle. □

On en conclut que

$$J_\xi^X(f) = J_\xi^X(f,1)\ .$$

Nous dirons que la contribution des éléments F-hyperboliques, quoique non invariante, est $\mathcal{T}$-stable.

5.4. **Contributions unipotentes.** On souhaite calculer $J_{unip}^X(f,z)$. Comme ci-dessus on pose :

$$\Phi_{unip}^X(f,x,z) = \sum_{\nu\in U(F)^\star} f(x^{-1}z\nu x) - \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(x)-X)\int_{U(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}zux)\,du$$

et

$$J_{unip}^X(f,\kappa,z) = \int_{Q_F}\kappa(y)\Big(\int_{M(F)U(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)}\Phi_{unip}^X(f,xy,z)\ d\dot{x}\Big)\,dy$$

où Q_F est le groupe compact

$$Q_F = \widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)G(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F) \simeq \widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)M(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{M}(\mathbb{A}_F)$$

muni de la mesure de Haar qui lui donne le volume 1. Avec ces conventions

$$J_{unip}^X(f,\kappa,z) = \int_{\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)U(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)}\kappa(x)\ \Phi_{unip}^X(f,x,z)\ d\dot{x}$$

soit encore

$$J_{unip}^X(f,\kappa,z) = \int_{\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)\widetilde{M}(F)\backslash\widetilde{M}(\mathbb{A}_F)}\kappa(\widetilde{m})\ \Phi_{unip}^X(f^K,\widetilde{m},z)\delta(\widetilde{m})^{-1}\,d\widetilde{m}$$

et, par inversion de Fourier,

$$J_{unip}^X(f,z) = \sum_\kappa J_{unip}^X(f,\kappa,z)$$

où on somme sur le dual de Pontryagin de Q_F. La somme *a priori* infinie ne porte que sur un nombre fini de termes, dépendant de f. Ici ce n'est pas le support de f qui importe mais sa lissité, à savoir le sous-groupe ouvert compact $H \in G(\mathbb{A}_F^\infty)$ sous lequel f est bi-invariante. On a noté $\mathbb{A}_F^\infty$ l'anneau des adèles finis et H est un sous-groupe d'indice fini du sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A}_F^\infty)$:

$$K^\infty = \prod_{v \notin \{\infty\}} SL(2, \mathfrak{O}_v) \ .$$

Considérons, comme ci-dessus, la fonction sur $\mathbb{A}_F$:

$$g(n,z) = f^K(zu) \quad \text{où} \quad u = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Posons

$$A^X(f,\kappa,z) = \int_{a \in \mathbb{A}_F^\times\,,\, |a| \geq q_F^{-X}} \kappa(a) g(a,z) |a| \, d^\times a$$

et

$$B^X(f,\kappa,z) = \int_{a \in C_F\,,\, |a| < q_F^{-X}} \kappa(a) h(a,z) |a| \, d^\times a$$

où $h(a,z)$ est la fonction sur le groupe $C_F = \mathbb{A}_F^\times / F^\times$ des classes d'idèles

$$h(a,z) = \sum_{\zeta \in F^\times} g(a\zeta, z) - \int_{n \in \mathbb{A}_F} g(an,z) dn \ .$$

On a alors

Lemme 5.4.1. *Les mesures de Haar étant choisies de sorte que Q_F ait le volume 1 on a*

$$J^X_{unip}(f,\kappa,z) = \frac{1}{2}\Big(A^X(f,\kappa,z) + B^X(f,\kappa,z) \Big) \ .$$

Démonstration. Le facteur $1/2$ vient du changement de variable $a \mapsto a^2$ dans la comparaison avec les intégrales qui apparaissant dans 4.2.3. En effet, pour les corps de nombres la mesure de Haar sur le groupe multiplicatif des réels vérifie $d^\times t^2 = 2 d^\times t$ et pour les corps de fonctions on doit sommer sur des réseaux isomorphes à $\mathbb{Z}$ ou $2\mathbb{Z}$ et on observe que

$$\sum_{n \in 2\mathbb{Z}} \varphi(n) = \frac{1}{2} \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \varphi(n) \Big) \ .$$

□

Pour obtenir de expressions plus explicites on introduit des variantes régularisées. Pour $s \in \mathbb{C}$ et $\Re(s) > 0$ on pose

$$C(f,s,\kappa,z) = \int_{\mathbb{A}_F^\times} \kappa(a) |a|^{1+s} g(a,z) \, d^\times a$$

et

$$D^X(f,s,\kappa,z) = \int_{|a| < q_F^{-X}} \Big(\kappa(a) |a|^{1+s} \int_{n \in \mathbb{A}_F} g(an,z) dn \Big) \, d^\times a$$

soit encore

$$D^X(f,s,\kappa,z)=\Big(\int_{|a|<q_F^{-X}}\kappa(a)|a|^s\,d^\times a\Big)\Big(\int_{\mathbb{A}_F}g(n,z)dn\Big)$$

qui sont convergentes pour $\Re(s)>0$. On a alors

$$A^X(f,\kappa,z)+B^X(f,\kappa,z)=\lim_{s\to 0}\big(C(f,s,\kappa,z)-D^X(f,s,\kappa,z)\big)\ .$$

On supposera désormais que f est un produit de fonctions locales f_v. On introduit des facteurs locaux :

$$C(f_v,s,\kappa_v,z)=\int_{F_v^\times}\kappa_v(a)|a|^{1+s}g_v(a,z)\ d^\times a\ .$$

On observe que pour presque toute place v la fonction

$$n\mapsto g_v(n,z)=\int_{K_v}f_v(k^{-1}zuk)dk\quad\text{où}\quad u=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

est la fonction caractéristique de l'anneau des entiers. Dans ce cas

$$C(f_v,s,\kappa_v,z)=L(1+s,\kappa_v)$$

où $L(\bullet,\kappa_v)$ est le facteur local de la fonction L de Hecke pour κ_v. En passant au produit sur toutes les places on obtient que

$$C(f,s,\kappa,z)=L(1+s,\kappa)\prod_v\frac{C(s,\kappa_v)}{L(1+s,\kappa_v)}\ .$$

Le produit ne porte que sur un nombre fini de places (dépendant du support de f) et la seule singularité au voisinage de $s=0$ est celle de la fonction L.

Pour $\kappa=1$ la fonction L est la fonction Zeta du corps F :

$$L(1+s,1)=Z(1+s)$$

et donc $C(s,1,z)$ a un pôle en $s=0$; ce pôle est compensé par le pôle de $D^X(s,1,z)$. On obtient une expression explicite en calculant la différence des termes d'ordre 0 des développements de Laurent. Reste à montrer que $J^0_{unip}(f,1,z)$ est une somme de produits sur toutes les places d'intégrales orbitales pondérées sous le groupe adjoint. Le terme provenant de D^0 est, à une constante près, l'intégrale orbitale unipotente sous le groupe adjoint. Par ailleurs

$$C(s,1,z)=Z(1+s)\prod_v\frac{C_v(s,1,z)}{Z_v(1+s)}$$

le produit sur les places v étant toujours convergent et holomorphe au voisinage de $s=0$ puisque presque tous les facteurs valent 1. Il suffit maintenant d'observer que la valeur en $s=0$ de $C_v(s,1,z)$ et de sa dérivée $C'_v(s,1,z)$ sont les intégrales orbitales unipotentes pondérées (locales) sous le groupe adjoint :

$$C_v(0,1,z)=\int_{\widetilde{Z}_vU_v\backslash\widetilde{G}_v}f_v(x^{-1}z\boldsymbol{\nu}x)\ d\dot{x}=\mathcal{O}^1_v(z\boldsymbol{\nu},f_v)\quad\text{où}\quad\boldsymbol{\nu}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

et, pour une certaine constante c_v, on a

$$C'_v(0,1,z) = c_v \int_{\widetilde{Z}_v U_v \backslash \widetilde{G}_v} f_v(x^{-1} z \boldsymbol{\nu} x) H_{P_v}(x)\ d\dot{x}\ .$$

Si $\kappa = \varepsilon_{E/F} \neq 1$ le terme $D^X(s,\kappa)$ est nul. Donc $J^X_{unip}(f,\kappa)$ est indépendant de X si $\kappa \neq 1$ et on omettra alors l'exposant.

Lemme 5.4.2. *Si* $\kappa = \varepsilon_{E/F} \neq 1$

$$J_{unip}(f,\kappa,z) = \frac{1}{2} \lim_{s\to 0} C(f,s,\kappa,z) = \frac{1}{2} \lim_{t\to z} \mathcal{O}^\kappa(t,f)$$

pour $t \in T_{E/F}(F)$.

Démonstration. Si $\kappa \neq 1$ on a

$$C(0,\kappa,z) = \lim_{s\to 0} L(1+s,\kappa) \prod_v \frac{C(f_v,s,\kappa_v,z)}{L(1+s,\kappa_v)} = L(1,\kappa) \prod_v \frac{C(0,\kappa_v,z)}{L(1,\kappa_v)}$$

où

$$C_v(0,\kappa_v,z) = \int_{\widetilde{Z}_v U_v \backslash \widetilde{G}_v} \kappa_v(x) f_v(x^{-1} z \boldsymbol{\nu} x)\ d\dot{x}$$

soit encore

$$C(0,\kappa,z) = L(1,\kappa) \prod_v \lim_{t\to z} \Delta_{\kappa_v}(t,t) \frac{\mathcal{O}^{\kappa_v}(t,f_v)}{L(1,\kappa_v)} = \lim_{t\to z} \mathcal{O}^\kappa(t,f)$$

pour $t \in T_{E/F}(F)$. □

5.5. **Pré-stabilisation spectrale.** La fonction sur $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$:

$$k^X_{spec}(\widetilde{x}) = K(\widetilde{x},\widetilde{x})\ - \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \int_{u\in[U]} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_P(\gamma\widetilde{x}) - X) K(u\gamma\widetilde{x},\widetilde{x}) du\ .$$

passe au quotient sur $[\widetilde{G}]$ et on a

$$J^X_{spec}(f) = \sum_\kappa J^X_{spec}(f,\kappa)\ .$$

On pose

$$f^x(y) = f(xyx^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \pi^x(y) = \pi(xyx^{-1})$$

et on a

$$J_{disc}(f,\kappa) = \int_{Q_F} J_{disc}(f^{\widetilde{x}}) \kappa(\det \widetilde{x}) dx = \sum_\pi a^\kappa(\pi) \operatorname{trace} \pi(f)$$

avec

$$a^\kappa(\pi) = \int_{Q_F} a(\pi^{\widetilde{x}}) \kappa(\det \widetilde{x}) dx\ .$$

On a utilisé que les κ sont d'ordre 2. On verra que même pour des représentations du spectre discret il n'est pas toujours vrai que $a^\kappa(\pi)$ soit un entier positif.

Proposition 5.5.1.
$$J^X_{cont}(f) = J^X_{cont}(f,1)$$
c'est-à-dire que les $J^X_{cont}(f,\kappa)$ *sont tous nuls si* $\kappa \neq 1$.

Démonstration. Tout $x \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ peut s'écrire de façon unique comme
$$x = ax_1 \qquad \text{avec} \qquad x_1 \in G(\mathbb{A}_F) \qquad \text{et} \qquad a = \begin{pmatrix} \det(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on définit une fonction $\widetilde{f}$ sur $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ en posant :
$$\widetilde{f}(x) = \theta\big(\det(x)\big) f(x_1)$$
où θ est une fonction sur $\mathbb{A}_F^\times$ de support assez petit de sorte que les deux conditions : $\xi \in F^\times$ et $\theta(\xi) \neq 0$ impliquent $\xi = 1$. On impose de plus que $\theta(1) = 1$. La fonction $\widetilde{f}$ permet de définir un noyau $\widetilde{K}$ pour $\widetilde{G}$:
$$\widetilde{K}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \sum_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{G}(F)} \widetilde{f}(\widetilde{x}^{-1}\widetilde{\gamma}\widetilde{y})$$
et
$$\widetilde{k}^X_{spec}(\widetilde{x}) = \widetilde{K}(\widetilde{x},\widetilde{x}) - \sum_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{P}(F)\backslash\widetilde{G}(F)} \int_{u\in U(\mathbb{A}_F)} \widehat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\widetilde{\gamma}\widetilde{x}) - X)\widetilde{K}(u\widetilde{\gamma}\widetilde{x},\widetilde{x})du \ .$$
On observe que $\widetilde{K}(\widetilde{x},\widetilde{x}) = K(\widetilde{x},\widetilde{x})$ et de même $\widetilde{K}(u\widetilde{\gamma}\widetilde{x},\widetilde{x}) = K(u\widetilde{\gamma}\widetilde{x},\widetilde{x})$ et donc
$$k^X_{spec}(\widetilde{x}) = \widetilde{k}^X_{spec}(\widetilde{x})$$
ce qui implique
$$J^X_{spec}(f,\kappa) = \int_{[\widetilde{G}]} \widetilde{k}^X_{spec}(\widetilde{x})\kappa(\widetilde{x})\, d\widetilde{x}$$
où le second membre est le côté spectral de la formule des traces pour $\widetilde{G}$ tordue par le caractère κ pour la fonction $\widetilde{f}$ (cf. [LW]). La contribution du spectre continu est, à un scalaire près, une intégrale de la forme
$$\int_{\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\Lambda}} \operatorname{trace}\big(\mathcal{M}^X(\widetilde{\lambda})\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{f})\,.\,I_\kappa\big)d\widetilde{\lambda}$$
où I_κ est l'opérateur envoyant l'espace $V_{\widetilde{\lambda}}$ de $\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}}$ sur celui de $\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}} \otimes \kappa$. Il convient d'observer que
$$\mathcal{M}^X(\widetilde{\lambda})\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{f})$$
est un opérateur dans l'espace de $\pi_{\widetilde{\lambda}}$ alors que I_κ échange l'espace de $\pi_{\widetilde{\lambda}}$ et celui de $\pi_{\widetilde{\lambda}} \otimes \kappa$. La trace est nulle sauf si
$$\widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}} \simeq \widetilde{\pi}_{\widetilde{\lambda}} \otimes \kappa$$
ce qui ne peut intervenir que pour un ensemble de $\widetilde{\lambda}$ de mesure nulle. $\square$

6. Stabilisation

6.1. **La $\mathcal{T}$-stabilisation.** La $\mathcal{T}$-stabilisation de la formule des traces est, par définition, ce que l'on obtient en composant la pré-stabilisation de la formule des traces non-invariante avec un transfert endoscopique pondéré. Un tel transfert n'a pas été établi en général ; toutefois on dispose dans la littérature du lemme fondamental pondéré et l'existence du transfert pondéré géométrique est facile à établir pour les fonctions à support régulier ; le cas général reste conjectural. Dans notre cas le transfert pondéré est disponible puisque pour la donnée endoscopique principale $\mathcal{E} = \{G, 1\}$ le transfert est l'identité $f^{\mathcal{E}} = f$ et que par ailleurs il n'y a pas de distributions pondérées à considérer pour les autres groupes endoscopiques : ce sont des tores. Pour la donnée endoscopique $\mathcal{E} = \{G, 1\}$ on voit que

$$J^X_{geom}(f, 1) \qquad \text{et} \qquad J^X_{spec}(f, 1)$$

donnent le côté géométrique et le côté spectral de la formule des traces $\mathcal{T}$-stable pour $G = SL(2)$. Les termes elliptiques dans $J^X_{geom}(f, 1)$ et les termes discrets dans $J^X_{spec}(f, 1)$ sont $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$-invariants et donc stables. Mais les termes hyperboliques ou unipotents et les termes continus ne le sont pas strictement : de fait ils ne sont même pas $G(\mathbb{A}_F)$-invariants. Mais ils le sont si on se limite à la conjugaison sous $M(\overline{\mathbb{A}_F})$ pour les éléments dans $P(\mathbb{A}_F)$, ce qui est d'ailleurs une conjugaison triviale pour les éléments hyperboliques ; mais elle est non triviale pour les unipotents.

6.2. **Termes instables.** On supposera dans cette section que $\kappa = \varepsilon_{E/F}$ où E est un corps, extension quadratique séparable du corps global F. Il résulte de ce qui précède (cf. 5) que

$$J^X_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = J_E(f, \varepsilon_{E/F}) + J_{unip}(f, \varepsilon_{E/F})$$

que l'on notera

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F})$$

puisqu'il est indépendant de X et de même

$$J^X_{spec}(f, \varepsilon_{E/F}) = J_{spec}(f, \varepsilon_{E/F})$$

est indépendant de X. On a donc

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = J_{spec}(f, \varepsilon_{E/F})$$

et

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = J_E(f, \varepsilon_{E/F}) + J_{unip}(f, \varepsilon_{E/F}) \ .$$

Le transfert local 2.3.3 et le lemme fondamental 2.3.4 fournissent un transfert global encore noté $f \mapsto f^{\mathcal{E}}$. Toutefois les mesures de Haar locales et globales sont à comparer.

Lemme 6.2.1. *Pour $\mathcal{E} = (T_{E/F}, \varepsilon_{E/F})$ avec $\varepsilon_{E/F} \neq 1$ le terme $J_{unip}(f, \varepsilon_{E/F})$ fournit la contribution de $Z(F)$ à l'expression géométrique de la formule des traces pour le tore $T_{E/F}$ attaché à l'extension quadratique séparable E/F associée à $\varepsilon_{E/F}$.*

$$J_{unip}(f, \varepsilon_{E/F}) = \frac{1}{2} \sum_z C(0, \varepsilon_{E/F}, z) = \frac{1}{2} \sum_z f^{\mathcal{E}}(z) \ .$$

Démonstration. D'après 5.4.2, compte tenu de 2.3.3 et 2.3.4, et en utilisant des mesure de Tamagawa locales non normalisées on a pour $t \in T_{E/F}(\mathbb{A}_F)$:

$$C(0, \varepsilon_{E/F}, z) = \lim_{t \to z} \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(t, f) = \lim_{t \to z} f^{\mathcal{E}}(t) = f^{\mathcal{E}}(z) \ .$$

□

Lemme 6.2.2.

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(\gamma)$$

pour la fonction $f^{\mathcal{E}}$ *avec* $\mathcal{E} = (T_{E/F}, \varepsilon_{E/F})$

Démonstration. D'après 2.1.1 et 5.2.4

$$J_E(f, \varepsilon_{E/F}) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in E^\star} \mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(\gamma, f) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in E^\star} f^{\mathcal{E}}(\gamma) \ .$$

Par ailleurs 6.2.1 montre que

$$J_{unip}(f, \kappa) = \frac{1}{2} \sum_{z \in Z(F)} \mathcal{O}^{\varepsilon_{E/F}}(z\boldsymbol{\nu}, f) = \frac{1}{2} \sum_{z} f^{\mathcal{E}}(z) \ .$$

□

Le second membre de 6.2.2 est, à un scalaire près, le côté géométrique de la formule des traces (en l'occurence de la formule de Poisson) pour $T_{E/F}$. C'est la contribution endoscopique pour le groupe endoscopique $T_{E/F}$:

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = \iota(\mathcal{E}) J^{\mathcal{E}}_{geom}(f^{\mathcal{E}})$$

La formule de Poisson s'écrit

$$J^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}}) := \sum_{\eta \in T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(\eta) = \frac{1}{\tau(T_{E/F})} \sum_{\theta \in \widehat{T_{E/F}}} \theta(f^{\mathcal{E}})$$

où $\widehat{T_{E/F}}$ est le dual de Pontyagin de $T_{E/F}(F) \backslash T_{E/F}(\mathbb{A}_F)$. On a donc

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = \frac{1}{4} \sum_{\theta \in \widehat{T_{E/F}}} \operatorname{trace} \pi^+_{E,\theta}(f) - \operatorname{trace} \pi^-_{E,\theta}(f) \ .$$

L'égalité

$$J_{geom}(f, \varepsilon_{E/F}) = J_{spec}(f, \varepsilon_{E/F})$$

montre donc que

$$J_{spec}(f, \varepsilon_{E/F}) = J_{cusp}(f, \varepsilon_{E/F}) + J_{cont}(f, \varepsilon_{E/F}) = \frac{1}{4} \sum_{\theta \in \widehat{T_{E/F}}} \operatorname{trace} \pi^+_{E,\theta}(f) - \operatorname{trace} \pi^-_{E,\theta}(f) \ .$$

On rappelle que $\pi^+_{E,\theta} \simeq \pi^+_{E,\theta^{-1}}$ et $\pi^-_{E,\theta} \simeq \pi^-_{E,\theta^{-1}}$. Donc lorsque $\theta \neq \theta^{-1}$ de telles représentations apparaissent dans $J_{spec}(f,\kappa)$ pour $\kappa \in \{1, \varepsilon_{E/F}\}$. La κ-multiplicité de $\pi^{\pm}_{E,\theta}$ vaut $1/2$ pour $\kappa = 1$ et $\pm 1/2$ pour $\kappa = \varepsilon_{E/F}$,

Si $\theta = \theta^{-1}$ mais $\theta \neq 1$ alors θ est d'ordre 2 et définit une extension quadratique L de E et L/F est une extension bi-quadratique. Dans ce cas $\pi^+_{E,\theta} \oplus \pi^-_{E,\theta}$ se décompose en une somme de 4 représentations inéquivalentes et on notera π_L le composant ayant un modèle de Whittaker. Il interviendra pour 3 extensions quadratiques E_i entre F et L soit donc au total avec multiplicité $3/4$ dans la partie instable et il interviendra avec multiplicité moyenne $1/4$ dans la partie stable $J_{disc}(f,1)$ et donc au total 1 dans $J_{disc}(f)$. Les autres apparaissent avec multiplicité $-1/4 = (1/4) - 2(1/4)$ dans la partie instable et $+1/4$ dans la partie stable et donc n'apparaissent pas dans $J_{disc}(f)$.

Enfin, le terme correspondant à $\theta = 1$ est la contribution de $J_{cont}(f, \varepsilon_{E/F})$, c'est-à-dire un des termes discrets issus de la troncature du spectre continu.

6.3. **La formule des traces $\mathcal{T}$-stable.** Si $\kappa = \varepsilon_{E/F}$ est non trivial et $\mathcal{E} = \{T_{E/F}, \varepsilon_{E/F}\}$ on pose $H = T_{E/F}$, $\iota(\mathcal{E}) = \tau(T_{E/F})/4 = 1/2$ et on a montré

$$SJ^H_{geom}(f^{\mathcal{E}}) = \sum_{\eta \in T_{E/F}(F)} f^{\mathcal{E}}(\eta) \quad \text{et} \quad SJ^H_{spec}(f^{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\tau(T_{E/F})} \sum_{\theta \in \widehat{T_{E/F}}} \theta(f^{\mathcal{E}}) \ .$$

On a alors

$$J^{G,X}_{\bullet}(f, \varepsilon_{E/F}) = J^G_{\bullet}(f, \varepsilon_{E/F}) = \iota(\mathcal{E}) SJ^H_{\bullet}(f^{\mathcal{E}}) \ .$$

Maintenant si $\mathcal{E} = \{SL(2), 1\}$ on a $f^{\mathcal{E}} = f$; on pose $\iota(\mathcal{E}) = 1$ et

$$SJ^{H,X}_{\bullet}(f^{\mathcal{E}}) = J^{G,X}_{\bullet}(f,1) \ .$$

Puisque

$$J^{G,X}_{\bullet}(f) = \sum_{\kappa} J^X_{\bullet}(f,\kappa)$$

la formule des traces pour G peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'expressions, que nous appellerons $\mathcal{T}$-stables, sur les groupes endoscopiques

$$J^{G,X}_{\bullet}(f) = \sum_{\mathcal{E}} \iota(\mathcal{E}) SJ^{H,X}_{\bullet}(f^{\mathcal{E}})$$

où $\bullet = geom$ ou $spec$.

6.4. **Sur certaines distributions non-invariantes.** Pour la stabilisation des distributions non invariantes par conjugaison nous aurons besoin d'une distribution non invariante auxiliaire : pour $m \in M(F)$ on pose pour $g \in G(\mathbb{A}_F)$:

$$\Psi(f,m,g) = \delta(m)^{1/2} \int_K \int_{U(\mathbb{A}_F)} \mathbf{H}_P(kg) f(k^{-1}muk)\, du\, dk \ .$$

Maintenant si $m \in M(\mathbb{A}_F)^\star$ on a

$$\Psi(f,m,g) = \Delta_M(m) \int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}mx)\big(\mathbf{H}_P(xg) - \mathbf{H}_P(x)\big)\, d\dot{x} \ .$$

En effet si $x = m_x u_x k_x$ alors $\mathbf{H}_P(xg) - \mathbf{H}_P(x) = \mathbf{H}_P(k_x g)$ donc

$$\Psi(f,m,g) = \Delta_M(m) \int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}mx)\mathbf{H}_P(k_x g)\ d\dot{x}$$

et l'égalité cherchée résulte du changement de variable $u \mapsto u'$ où $x = uk$ et

$$u' = m^{-1}u^{-1}mu\ .$$

Du côté géométrique les éléments hyperboliques et unipotents donnent naissance à des distributions non-invariantes appelées intégrales orbitales pondérées notées $J_m(f)$ pour $m \in M(\mathbb{A}_F)$. Pour $m \in M(\mathbb{A}_F)^\star$ on pose

$$J_m(f) = \Delta_M(m) \int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}mx)\boldsymbol{\eta}(x)\ d\dot{x}\ .$$

Lemme 6.4.1. *On pose $w(m) := wmw^{-1}$. Pour $m \in M(\mathbb{A}_F)^\star$ on a*

$$J_m(f^g) - J_m(f) = -\big(\Psi(f,m,g) + \Psi(f,w(m),g)\big)\ .$$

Démonstration.

$$J_m(f^g) - J_m(f) = \Delta_M(m) \int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \Big(f(gx^{-1}mxg^{-1}) - f(x^{-1}mx)\Big)\boldsymbol{\eta}(x)\ d\dot{x}$$

soit encore

$$J_m(f^g) - J_m(f) = \Delta_M(m) \int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}mx)\big(\boldsymbol{\eta}(xg) - \boldsymbol{\eta}(x)\big)\ d\dot{x}$$

On a vu que

$$\boldsymbol{\eta}(x) = \varepsilon - \big(\mathbf{H}_P(x) + \mathbf{H}_P(wx)\big)$$

où $\varepsilon = 0$ ou 1 suivant que l'on travaille avec un corps de nombres ou un corps de fonctions et donc

$$J_m(f^g) - J_m(f) = -\big(\Psi(f,m,g) + \Psi(f,w(m),g)\big)\ .$$

□

On considère l'unipotent

$$u = \begin{pmatrix} 1 & n_u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(\mathbb{A}_F)$$

et on pose

$$\ell(x) = \log_{q_F}(|n_u|) \quad \text{si} \quad x = k^{-1}uk \quad \text{avec} \quad k \in K \quad \text{et} \quad n_u \in \mathbb{A}_F^\times\ .$$

Cette fonction est bien définie car le normalisateur dans $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ de l'ensemble des u avec $n_u \in \mathbb{A}_F^\times$ est $\widetilde{P}(\mathbb{A}_F)$ et donc n_u est bien défini à une unité près. Pour $z \in Z(\mathbb{A}_F)$ on définit

$$J_z(f) = \int_{\widetilde{Z}(\mathbb{A}_F)U(\mathbb{A}_F)\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}z\boldsymbol{\nu}x)\ell(\nu(x))\, d\dot{x} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\nu(x) = x^{-1}\boldsymbol{\nu}x$.

Lemme 6.4.2.

$$J_z(f^g) - J_z(f) = -2\Psi(f,z,g) \ .$$

Démonstration.

$$J_z(f^g) = \int_{U(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(gx^{-1}z\boldsymbol{\nu}xg^{-1})\ell(\nu(x))\ d\dot{x}$$

soit encore

$$J_z(f^g) = \int_{U(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}z\boldsymbol{\nu}x)\ell(\nu(xg))\ d\dot{x}$$

et en d'observant que

$$\mathbf{H}_P(xg) = \mathbf{H}_P(kg) + \mathbf{H}_P(x)$$

et que pour $m \in \widetilde{M}(\mathbb{A}_F)$:

$$\ell(m^{-1}um) = \log_{q_F}(|m^{-\alpha}n_u|) \quad \text{soit encore} \quad \ell(m^{-1}um) = \ell(u) - 2\mathbf{H}_P(m)$$

on obtient

$$\ell(\nu(xg)) = \ell(\nu(x)) - 2\mathbf{H}_P(kg) \ .$$

□

On note $A(g)$ l'opérateur de multiplication par $\mathbf{H}_P(kg)$ dans $L^2(K)$:

$$\big(A(g)\varphi\big)(k) = \mathbf{H}_P(kg)\varphi(k) \ .$$

Lemme 6.4.3.

$$\operatorname{trace} A(g)\pi_\lambda(f) = \int_{M(\mathbb{A}_F)} \Psi(f,m,g)\, m^\lambda\, dm \ .$$

Démonstration. Il suffit d'observer que le noyau $K(k_1,k_2)$ sur $K \times K$ représentant l'opérateur $\pi_\lambda(f)$ dans $L^2(K)$ a pour formule

$$K(k_1,k_2) = \int_{M(\mathbb{A}_F)} \int_{U(\mathbb{A}_F)} f(k_1^{-1}muk_2)m^\lambda \delta_P(m)^{1/2} dm du \ .$$

□

Lemme 6.4.4.

$$\pi_{w\lambda}(g)\mathbf{M}'(\lambda)\pi_\lambda(g)^{-1} - \mathbf{M}'(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)A(g) + A(g)\mathbf{M}(\lambda) \ .$$

Démonstration. On observe que si $\lambda = sr + \chi$ on a

$$\frac{d}{ds}\pi_\lambda(g) = A(g)\pi_\lambda(g) \quad \text{et} \quad \pi_{w\lambda}(g)\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)\pi_\lambda(g) \ .$$

En dérivant en s la seconde expression on obtient

$$-A(g)\pi_{w\lambda}(g)\mathbf{M}(\lambda) + \pi_{w\lambda}(g)\mathbf{M}'(\lambda) = \mathbf{M}'(\lambda)\pi_\lambda(g) + \mathbf{M}(\lambda)A(g)\pi_\lambda(g)$$

□

Du côté spectral apparaissent des distributions non-invariantes appelées caractères pondérés :

$$f \mapsto \Phi(\lambda, f) = \mathrm{trace}\, \mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(f)$$

où $\mathcal{N}(\lambda)$ est la dérivée logarithmique de l'opérateur d'entrelacement normalisé $\mathbf{R}(\lambda)$:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \mathbf{R}(\lambda)^{-1}\mathbf{R}'(\lambda) \ .$$

Lemme 6.4.5. *On a l'identité de distributions suivante :*

$$\Phi(\lambda, f^g) - \Phi(\lambda, f) = \mathrm{trace}\, A(g)\big(\pi_\lambda(f) + \pi_{w\lambda}(f)\big) \ .$$

Démonstration. Pour ce calcul il revient au même de remplacer $\mathbf{R}$ par $\mathbf{M}$ dans la définition de $\mathcal{N}$ puisque les dérivées logarithmiques du facteur de normalisation se compensent. Par définition

$$\Phi(\lambda, f^g) - \Phi(\lambda, f) = \mathrm{trace}\, \mathcal{N}(\lambda)\Big(\pi_\lambda(f^g) - \pi_\lambda(f)\Big)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{trace}\,\Big(\mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(g)^{-1}\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(g) - \mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(f)\Big)$$

soit encore

$$\mathrm{trace}\,\Big(\pi_\lambda(g)\mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(g)^{-1} - \mathcal{N}(\lambda)\Big)\pi_\lambda(f)$$

On observe que $\mathbf{M}(\lambda)\pi_\lambda(g) = \pi_{w\lambda}(g)\mathbf{M}(\lambda)$ et l'assertion cherchée est alors conséquence immédiate du lemme 6.4.4. $\square$

On pose

$$I_\lambda(f) = \mathrm{trace}\,\big(\mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(f)\big) + \int_{M(\mathbb{A}_F)} J_m(f)\, m^\lambda\, dm$$

et si $\widehat{M(\mathbb{A}_F)}$ est le dual de Pontryagin de $M(\mathbb{A}_F)$ on pose

$$I_m(f) = J_m(f) + \int_{\widehat{M(\mathbb{A}_F)}} \mathrm{trace}\,\big(\mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(f)\big) m^{-\lambda}\, d\lambda \ .$$

Proposition 6.4.6. *Les distributions $I_\lambda(f)$ et $I_m(f)$ sont stablement invariantes :*

$$I_\lambda(f^g) = I_\lambda(f)$$

pour tout $g \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$. Il en est de même pour I_m.

Démonstration. Il résulte de 6.4.1 et 6.4.2 que

$$\int_{M(\mathbb{A}_F)} \Big(J_m(f^g) - J_m(f)\Big)\, m^\lambda\, dm = -\int_{M(\mathbb{A}_F)} \Psi_m(f)\, \big(m^\lambda + m^{w\lambda}\big)\, dm \ .$$

Par ailleurs 6.4.3 et 6.4.5 montrent que

$$\Phi(\lambda, f^g) - \Phi(\lambda, f) = \mathrm{trace}\, A(g)\big(\pi_\lambda(f) + \pi_{w\lambda}(f)\big)$$

est égal à

$$\int_{M(\mathbb{A}_F)} \Psi_m(f)\, \big(m^\lambda + m^{w\lambda}\big)\, dm \ .$$

$\square$

6.5. **La forme stablement invariante.** Une forme invariante pour la formule des traces pour $SL(2)$ est obtenue en faisant passer du côté géométrique la partie non-invariante du côté spectral. Les termes non-invariant du côté géométrique sont les contributions hyperbolique et le terme correspondant à $\kappa = 1$ de la pré-stabilisation de la contribution unipotente. On rappelle que l'on a posé

$$J_\xi(f) = \int_{M(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\xi x)\boldsymbol{\eta}(x)\,d\dot{x}$$

et pour $\xi = z \in Z(F)$ on pose

$$J_z(f) = \int_K \int_{U(\mathbb{A}_F)} f_v(k^{-1}zuk)\lambda(u)\,dk\,du\ .$$

Les termes non invariant du côté spectral font intervenir la dérivée logarithmique de l'opérateur d'entrelacement. Mais l'opérateur d'entrelacement $\mathbf{M}(s,\lambda)$ peut s'écrire comme le produit

$$\mathbf{M}(s,\lambda) = m(\lambda)\mathbf{R}(\lambda)$$

d'un facteur scalaire $m(\lambda)$ quotient de fonctions L de Hecke et d'un opérateur appelé opérateur d'entrelacement normalisé noté $\mathbf{R}(\lambda)$. Cela permet de décomposer sa dérivée logarithmique $\mathcal{M}(\lambda)$ en une somme d'un opérateur scalaire et d'un autre opérateur :

$$\mathcal{M}(\lambda) = \frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)} + \mathcal{N}(\lambda)$$

où $\mathcal{N}(\lambda)$ est la dérivée logarithmique de $R(\lambda)$. La clef du passage à la forme invariante est le

Lemme 6.5.1.

$$\int_\Lambda \operatorname{trace}\Big(\mathcal{N}(\lambda)\pi_\lambda(f)\Big)\,d\lambda = \sum_{\xi\in M(F)} N_\xi(f)$$

et

$$I_\xi(f) = J_\xi(f) + N_\xi(f)$$

est une distribution invariante.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 6.4.6. $\square$

Le côté géométrique s'écrit

$$I_{geom}(f) = I_{ell}(f) + I_p(f)$$

où

$$I_{ell}(f) = J_{ell}(f) \qquad \text{et} \qquad I_p(f) = \sum_\xi I_\xi(f)$$

Le côté spectral de la formule des traces invariante s'écrit

$$I_{spec}(f) = I_{disc}(f) + I_{cont}(f)$$

où

$$I_{disc}(f)=J_{disc}(f) \quad \text{et} \quad I_{cont}=\frac{-1}{2}\int_\Lambda \frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)}\text{trace}\,\pi_\lambda(f)\,d\lambda\ .$$

La stabilisation invariante s'écrit :

Théorème 6.5.2. *On a les identités*

$$I_{geom}(f)=\sum_{\mathcal{E}}\iota(\mathcal{E})SI^{\mathcal{E}}_{geom}(f^{\mathcal{E}}) \quad et \quad I_{spec}(f)=\sum_{\mathcal{E}}\iota(\mathcal{E})SI^{\mathcal{E}}_{spec}(f^{\mathcal{E}})$$

avec

$$SI^{\mathcal{E}}_{ell}=J^{\mathcal{E}}_{ell} \quad , \quad SI^{\mathcal{E}}_{disc}=J^{\mathcal{E}}_{disc} \quad , \quad SI^{G}_{p}=I_p \quad et \quad SI^{G}_{cont}=I_{cont}$$

et

$$I^{G}_{geom}(f)=I^{G}_{spec}(f) \quad et \quad SI^{\mathcal{E}}_{geom}(f)=SI^{\mathcal{E}}_{spec}(f)\ .$$

Remarque 6.5.3. Les distributions qui apparaissent dans $J^G_\bullet(f,1)$ sont les distributions qui apparaissent dans la formule des traces non-invariante pour $\widetilde{G}$. De même, les distributions qui apparaissent dans $I^G_\bullet$ sont les distributions qui apparaissent dans la formule des traces stable pour $\widetilde{G}$.

7. Formes intérieures : Unités des algèbres de quaternions

7.1. **Théorie locale.** Soit F un corps local et soit $\mathbb{H}$ l'algèbre de quaternions (non déoloyée) de centre F. On note $\widetilde{G}'(F) = \mathbb{H}^\times$ son groupe multiplicatif et $\mathbb{H}^1 = G'(F)$ le sous-groupe des éléments de norme 1.

Soit E un corps extension quadratique séparable de F. On note $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ l'action du groupe de Galois de E/F. Alors on peut identifier $\mathbb{H}$ à l'ensemble des matrices dans $M(2,E)$ de la forme
$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta}\mathfrak{d} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$
avec
$$\alpha \in E \quad , \quad \beta \in E \quad , \quad \mathfrak{d} \in F^\times \quad \text{mais} \quad \mathfrak{d} \notin N_{E/F}E^\times \ .$$
On a plongé E comme le sous-ensemble des matrices diagonales dans $\mathbb{H}$ et l'action de l'élément non trivial du groupe de Galois est induit par la conjugaison par
$$\boldsymbol{w}_E = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{d} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$
Comme $\mathfrak{d}$ n'est pas une norme on a $\varepsilon_{E/F}(\mathfrak{d}) = -1$ d'où le

Lemme 7.1.1.
$$\varepsilon_{E/F}\big(\det(\boldsymbol{w}_E)\big) = \varepsilon_{E/F}(-\mathfrak{d}) = -\varepsilon_{E/F}(-1) \ .$$

Correspondance de Jacquet-Langlands. On a une bijection entre les classes de conjugaison d'éléments de $\mathbb{H}^\times$ et les classes de conjugaison d'éléments elliptiques ou inséparables de $\widetilde{G}(F)$. Cette bijection est duale de la bijection, appelée correspondance de Jacquet-Langlands et notée JL :
$$\widetilde{\pi}' \mapsto \mathrm{JL}\,(\widetilde{\pi}')$$
entre l'ensemble des représentations (unitaires) irréductibles de $\widetilde{G}'(F) = \mathbb{H}^\times$ dans l'ensemble des séries discrètes de $\widetilde{G}(F) = GL(2,F)$ et cette bijection est compatibles aux torsions par des caractères et à la bijection entre classes de conjugaison. De plus on a une égalité au signe près (le signe de Kottwitz) pour la restriction de caractères des représentations aux éléments elliptiques réguliers (voir le chapitre 15 de [JL])
$$\mathrm{trace}\,\widetilde{\pi}'(t) = -\mathrm{trace}\,\mathrm{JL}\,(\widetilde{\pi}')(t) \ .$$

Décomposition par restriction à $G'(F)$. Pour le corps des réels la norme des quaternions n'est pas surjective (elle ne prend que des valeurs positives). Un caractère de $\mathbb{H}^\times$ correspond à deux caractères de $GL(2,\mathbb{R})$ qui diffèrent par le caractère signe et le groupe $X(\widetilde{\pi}')$ est toujours trivial. Les représentations de $\mathbb{H}^\times$ restent donc irréductibles par restriction à $G'(\mathbb{R})$.

Si F est non archimédien et si $\widetilde{\pi}'$ est une représentation admissible irréductible (unitaire) de $\widetilde{G}'(F)$ correspondant à $\widetilde{\pi}$, le groupe $X(\widetilde{\pi}')$ des caractères tels que $\widetilde{\pi}' \otimes \boldsymbol{\chi}' \simeq \widetilde{\pi}'$ est isomorphe à $X(\widetilde{\pi})$; il est donc de cardinal 1, 2 ou 4. Cependant, on verra ci-dessous que l'algèbre d'entrelacement de la restriction π' de $\widetilde{\pi}'$ à $G'(F)$ n'est pas toujours isomorphe à celle la restriction de $\widetilde{\pi}$ à $G(F)$ quoique de même dimension. Si $\widetilde{\pi}' \otimes \varepsilon_{E/F} \simeq \widetilde{\pi}'$ il existe un caractère $\widetilde{\theta}$ de $E^\times$ tel que $\mathrm{JL}\,(\widetilde{\pi}') = \widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ et $\widetilde{\pi}'$ sera notée $\widetilde{\pi}'(\widetilde{\theta})$. Notons $G'(F)_E$ le noyau de $\varepsilon_{E/F} \circ \det$. Par restriction à $G'(F)_E$ la représentation $\widetilde{\pi}'(\widetilde{\theta})$ se décompose en somme de deux représentations irréductibles inéquivalentes que nous noterons $\widetilde{\pi}'^{-+}_{E,\widetilde{\theta}}$ et $\widetilde{\pi}'^{-}_{E,\widetilde{\theta}}$. Pour $\widetilde{G}(F)_E$ l'existence de modèles de Whittaker permettait de distinguer entre $\widetilde{\pi}^{+}_{E,\widetilde{\theta}}$ et $\widetilde{\pi}^{-}_{E,\widetilde{\theta}}$. Pour $G'(F)_E$ et il ne semble pas y avoir de façon simple pour distinguer les $\widetilde{\pi}'^{\pm}_{E,\widetilde{\theta}}$.

Transferts géométrique et spectral. On utilise le même facteur de transfert

$$\Delta^{\mathcal{E}}(t,t') = \lambda(E/F,\psi)^{-1}\varepsilon_{E/F}\Big(\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{\tau-\overline{\tau}}\Big)|\gamma-\overline{\gamma}|$$

Lemme 7.1.2. *Pour $\mathcal{E} = (T_{E/F}, \varepsilon_{E/F})$ il existe une fonction*

$$f^{\mathcal{E}} \in \mathcal{C}^\infty_c\big(T_{E/F}(F)\big)$$

appelée transfert de f pour la donnée endoscopique $\mathcal{E}$ telle que

$$f^{\mathcal{E}}(t') = \Delta^{\mathcal{E}}(t,t')\mathcal{O}^\kappa(t,f)\ .$$

Démonstration. Si F est non archimédien $\mathcal{O}(t,f) = \mathcal{O}(\bar{t},f)$ pour t assez voisin de 1 dans dans $G'(F)$ et $\mathcal{O}^\kappa(t,f) = 0$; la lissité de $f^{\mathcal{E}}$ en résulte. Si $F = \mathbb{R}$ on peut identifier $T_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ avec le groupe des nombre complexes de module 1 et

$$\varepsilon_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\Big(\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{\tau-\overline{\tau}}\Big)|\gamma-\overline{\gamma}| = c\,(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$$

(pour un $\varphi \in \mathbb{R}$ et c de module 1) qui est lisse de même que l'intégrale orbitale, pour les mesures de Haar normalisées, les groupe $G'(\mathbb{R})$ et $T_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ étant compacts. □

Compte tenu de 7.1.1 le transfert spectral est alors de la forme

$$\theta^{\mathcal{E}}(t) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_{E/F}\Big(\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{\tau-\overline{\tau}}\Big)\frac{\big(\theta(\gamma)-\theta(\gamma^{-1})\big)}{|\gamma-\gamma^{-1}|}\ .$$

Si θ la restriction de $\widetilde{\theta}$ aux éléments de norme 1. On note $\pi'(\theta)^{\pm}$ les restrictions de $\widetilde{\pi}'^{\pm}_{E,\widetilde{\theta}}$ à $G'(F)$. On voit comme dans 3.3.6 que la différence des caractères

$$\mathrm{trace}\,\pi'^{+}_{E,\theta}(t) - \mathrm{trace}\,\pi'^{-}_{E,\theta}(t)$$

est nulle sur les tores non isomorphes à $T_{E/F}$. Il résultera de considérations globales (stabilisation des formules des traces pour G et G' sur des corps globaux) que pour $t \in T_{E/F}(F)$ régulier on a

$$\theta^{\mathcal{E}}(t) = \mathrm{trace}\,\pi'^{+}_{E,\theta}(t) - \mathrm{trace}\,\pi'^{-}_{E,\theta}(t)\ .$$

On sait déjà que les $\pi'(\theta)^{\pm}$ sont irréductibles inéquivalentes si θ n'est pas d'ordre 2. Par contre, si θ est d'ordre 2 non trivial, on voit que

$$\mathrm{trace}\,\pi'^{+}_{E,\theta}(t) \equiv \mathrm{trace}\,\pi'^{-}_{E,\theta}(t)$$

pout tout $t \in G'(F)$. Les deux représentations sont donc équivalentes et l'algèbre de d'entrelacement de la restriction de $\widetilde{\pi}'(\widetilde{\theta})$ à $G'(F)$ est isomorphe à l'algèbre $M(2,\mathbb{C})$ des matrice 2×2 complexes alors que celle de la restriction de $\widetilde{\pi}_{E,\widetilde{\theta}}$ à $G(F)$ était $\mathbb{C}^4$: les algèbres d'entrelacement sont de même dimension mais non isomorphes.

7.2. **Théorie globale.** Soit F un corps global, $\mathbb{H}$ une algèbre de quaternions sur F et soit G' le groupe des éléments de norme 1. On note I_γ le centralisateur de γ, Γ_F un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans $G'(F)$ et Π un ensemble de représentants des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de $G'(\mathbb{A}_F)$ qui interviennent dans la décomposition spectrale. de $L^2(G'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F))$. Les classes de conjugaison sont de deux sortes : Il y a l'élément neutre et d'autre part le éléments semi-simples réguliers dont le centralisateur est un tore anisotrope. Les éléments hyperboliques ou unipotents n'apparaissent pas dans $G'(F)$ même si ils apparaissent localement aux places v où $G'(F_v)$ est déployé c'est-à-dire partout sauf en un nombre fini pair, mais non nul, de places. La compacité de $G'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)$ implique que le spectre de $L^2(G'(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F))$ est purement discret et on note $m(\pi)$ la multiplicité de π dans le spectre discret. Pour G' la formule des traces est donc élémentaire :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_F} \operatorname{vol}\big(I_\gamma(F)\backslash I_\gamma(\mathbb{A}_F)\big)\mathcal{O}(\gamma, f) = \sum_{\pi'\in\Pi'} m(\pi')\operatorname{trace}(\pi'(f)\ .$$

La pré-stabilisation et la stabilisation s'établissent comme dans le cas déployé sauf qu'il n'y a pas distinguer entre la $\mathcal{T}$-stabilisation et la stabilisation invariante. Le seul phénomène nouveau est que les multiplicités peuvent ne pas être plus grandes que 1. C'est clair pour certaines représentations instables mais c'est aussi le cas pour des représentations stables. En effet on a vu ci-dessus que certains composants des L-paquets peuvent avoir localement multiplicité 2.

Annexe A. Rappels et compléments d'analyse harmonique

A.1. **Relations d'orthogonalité.** Soit H un groupe localement compact unimodulaire. Soit π une représentation de la série discrète c'est-à-dire une représentation unitaire irréductible dans un espace de Hilbert V dont tous les coefficients

$$f(x) = \langle \pi(x)v, w\rangle$$

sont de carré intégrable. On peut montrer que

$$\int_H |f(x)|^2 dx \leq C(\pi)||v||.||w|| \;.$$

Si σ est une autre représentation de la série discrète dans V' l'intégrale

$$A(v, v', w, w') = \int_H \langle \pi(x)v, w\rangle \overline{\langle \sigma(x)v', w'\rangle}\, dg$$

est convergente.

Lemme A.1.1. *Il existe une constante d_π dépendant de π et du choix de la mesure de Haar sur H telle que*

$$A(v, v', w, w') = \begin{cases} d_\pi \langle v, v'\rangle \overline{\langle w, w'\rangle} & \text{Si } \pi = \sigma \\ 0 & \text{Si } \pi \not\simeq \sigma \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $y \in H$

$$A(v, v', w, w') = A(\pi(y)v, \sigma(y)v', w, w')$$

et donc il existe un opérateur (linéaire continu) $I : V \to V'$ (dépendant de w et w') tel que

$$A(v, v', w, w') = \langle Iv, v'\rangle = A(\pi(y)v, \sigma(y)v', w, w') = \langle I\pi(y)v, \sigma(y)v'\rangle$$

et donc

$$I\pi(y) = \sigma(y)I$$

Si A n'est pas identiquement nul l'opérateur I est non nul et entrelace π et σ. Donc A n'est pas identiquement si et seulement si π et σ sont équivalentes. $\square$

Le même raisonnement s'applique si π a tous ses coefficients à support compact (ou plus généralement intégrables) et σ unitaire irréductible arbitraire.

Supposons désormais que $H = \boldsymbol{G}(F)$ où $\boldsymbol{G}$ est un groupe réductif défini sur un corps. Pour ne pas avoir à prendre en compte le centre nous supposerons pour simplifier que $\boldsymbol{G}$ est semi-simple. Supposons que π a tous ses coefficients à support compact. Ce sera le cas des représentations super-cuspidales. Soit $\mathcal{B}_\pi = \{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale de l'espace de Hilbert V où se réalise la représentation π. Notons χ_π son caractère qui est une distribution que l'on supposera représentable par une fonction localement intégrable. On appelle coefficient normalisé une fonction de la forme

$$f_\pi(x) = \frac{1}{d_\pi}\langle \pi(x)e_0, e_0\rangle$$

où e_0 est un élément de $\mathcal{B}_\pi$.

Lemme A.1.2. *soient π et π' deux représentations admissibles de carré intégrables. Un coefficient normalisé pour π vérifie*

$$\operatorname{trace}\pi(\overline{f_\pi}) = 1 \quad et \quad \operatorname{trace}\pi'(\overline{f_\pi}) = 0 \quad si \quad \pi' \not\simeq \pi \ .$$

Démonstration. La trace de l'opérateur

$$\pi'(f_\pi) = \int_H \pi'(x)\overline{f_\pi(x)}\,dx$$

est donnée par la série

$$\operatorname{trace}\pi'(f_\pi) = \sum_{e\in\mathcal{B}_{\pi'}} \langle \pi'(f_\pi)e, e\rangle = \frac{1}{d_\pi}\sum_{e\in\mathcal{B}_{\pi'}} \int_H \langle \pi'(x)e, e\rangle \overline{\langle \pi(x)e_0, e_0\rangle}\,dx$$

et le lemme résulte de A.1.1. □

A.2. **Caractères et intégrales orbitales.**

Proposition A.2.1. *Les représentations admissibles irréductibles des sous-groupes distingués ouverts d'indice fini de $GL(n, F)$, ainsi que celles de $SL(n, F)$ et de leurs formes intérieures, admettent des caractères distribution qui sont représentables par des fonctions localement intégrables.*

Démonstration. C'est bien connu si F est archimédien ou si F est non archimédien de caractéristique zéro pour des groupes réductifs arbitraires par les travaux d'Harish-Chandra. Pour les corps non archimédiens, sans restriction sur la caractéristique, le cas $GL(2)$ est traité dans [JL]. On dispose désormais des résultats de [Le] pour tout n. Le cas des groupes réductifs arbitraires reste conjectural. □

Lemme A.2.2. *Si π est cuspidale les intégrales orbitales d'un coefficient normalisé f_π, pour un élément x semi-simple régulier, vérifient*

$$\mathcal{O}(x, f_\pi) = \begin{cases} \chi_\pi(x) & \textit{si } x \textit{ est elliptique} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Supposons x elliptique régulier. Soit φ une fonction lisse à support compact dans un voisinage assez petit de x de sorte que tous les points de ce voisinage sont aussi elliptiques réguliers. On a

$$\int_H \mathcal{O}(x, f_\pi)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{d_\pi}\int_H \Big(\int_{I_x\backslash H} \langle \pi(y^{-1}xy)e_0, e_0\rangle\,dy\Big)\varphi(x)\,dx$$

qui, si on munit I_x de la mesure de masse totale 1, est encore égal à

$$\frac{1}{d_\pi}\int_H \langle \pi(\varphi)\pi(y)e_0, \pi(y)e_0\rangle\,dy = \frac{1}{d_\pi}\sum_{e\in\mathcal{B}_\pi}\int_H \langle \pi(\varphi)\pi(y)e_0, e\rangle\overline{\langle \pi(y)e_0, e\rangle}\,dy$$

et les relations d'orthogonalité A.1.1 donnent

$$\int_H \mathcal{O}(x, f_\pi)\varphi(x)\,dx = \sum_{e\in\mathcal{B}_\pi}\langle \pi(\varphi)e, e\rangle = \operatorname{trace}\pi(\varphi)$$

et donc
$$\int_H \mathcal{O}(x, f_\pi)\varphi(x)\, dx = \int_H \chi_\pi(x)\varphi(x)\, dx \ .$$
Considérons maintenant un élément x semi-simple non elliptique. Nous devons montrer l'annulation de son intégrale orbitale. C'est classique ; faisons le lorsque $H = SL(2, F)$ pour un coefficient construit à partir de vecteurs lisses c'est-à-dire K-finis. Par hypothèse $x = y^{-1}ay$ avec $a \in A(F)$ où A est le tore diagonal et a régulier. On a
$$H = SL(2, F) = A(F)U(F)K$$
et donc
$$\mathcal{O}(x, f_\pi)\, dx = \int_{A(F)\backslash H} \langle \pi(y^{-1}ay)e_0, e_0\rangle\, dy = \int_K \int_{U(F)} \langle \pi(k^{-1}u^{-1}auk)e_0, e_0\rangle\, du\, dk$$
soit encore en utilisant que $A(F)$ normalise $U(F)$ et que a est régulier on a
$$\mathcal{O}(x, f_\pi)\, dx = d(a) \int_K \int_{U(F)} \langle \pi(k^{-1}auk)e_0, e_0\rangle\, du\, dk$$
Maintenant il suffit d'observer que si les e_i sont des vecteurs lisses
$$\int_{U(F)} \langle \pi(u)e_1, e_2\rangle\, du = 0$$
si π est cuspidale. En effet, par définition de la cuspidalité, le sous-espace des co-invariants (lisses) sous $U(F)$ est l'espace (des vecteurs lisses) tout entier et on peut donc écrire e_2 comme somme finie de vecteurs de la forme $(\pi(u_i) - 1)\varepsilon_i$. $\square$

Lemme A.2.3. *Soit π une représentation cuspidale et $f_\pi(x)$ un coefficient normalisé. Soit σ une représentation unitaire somme finie de représentations de carré intégrables de $G(F)$. La multiplicité $n(\pi, \sigma)$ de π dans σ est donnée par l'entier*
$$n(\pi, \sigma) := \operatorname{trace} \overline{\sigma}(f_\pi) = \langle \chi_\sigma, \chi_\pi\rangle \ .$$
Démonstration. Les relations d'orthogonalité de Weyl A.1.2 montrent que
$$\operatorname{trace} \sigma(\overline{f_\pi}) = n(\pi, \sigma) \ .$$
La formule d'intégration de Weyl fournit l'égalité
$$\operatorname{trace} \sigma(\overline{f}_\pi) = \int_{G(F)} \overline{f_\pi(x)}\chi_\sigma(x)\, dx = \sum_T w_T^{-1} \int_{T(F)} \Delta_T(t)^2 \chi_\sigma(t)\overline{\mathcal{O}(f_\pi, t)}\, dt$$
où la somme porte sur les classes de conjugaisons de tores dans $G(F)$ et w_T est l'ordre du quotient $N_T(F)/T(F)$ où N_T est le normalisateur de T. Les tores compacts sont munis de la mesure de Haar normalisée (vol $(T(F) = 1)$. Puisque π est cuspidale, il résulte de A.2.2 qu'en un point $t \in T(F)$ régulier
$$\mathcal{O}(f_\pi, t) = \chi_\pi(t)$$

si $T(F)$ est un tore elliptique dans $G(F)$ et l'intégrale orbitale est nulle pour un tore déployé. On en déduit que :

$$\operatorname{trace}\sigma(\overline{f}_\pi) = \sum_T w_T^{-1} \int_{T(F)} \Delta_T(t)^2 \chi_\sigma(t)\overline{\chi_\pi(t)}\, dt = \langle \chi_\sigma, \chi_\pi \rangle$$

$\square$

Annexe B. Thèse de Tate

Adèles et dualité de Pontryagin. Soit F un corps global et soit $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles. On rappelle que les groupe additif des corps locaux F_v et des adèles $\mathbb{A}_F$ sont auto-duaux pour la dualité de Pontryagin. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$ est l'espace des fonctions lisse et à "décroissance rapide". Rappelons-en la définition. Si F_v est non archimédien les fonctions lisses à "décroissance rapide" sont, par définition, les fonctions localement constantes à support compact. Pour les corps archimédiens c'est la notion usuelle. Maintenant sur les adèles une fonction lisse et à "décroissance rapide" est, par définition, une somme finie de fonctions décomposables

$$f = \prod_v f_v$$

où chaque f_v est lisse à "décroissance rapide" et où pour presque toutes les places f_v est la fonction caractéristique de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de F_v. Il en résulte que pour les corps de fonctions les fonctions lisses à "décroissance rapide" sont les fonctions localement constantes à support compact. Les espace de Schwartz sont préservés par la transformation de Fourier.

Fonction Zeta. La fonction Zeta attachée à f est par définition la fonction de $s \in \mathbb{C}$ définie par l'intégrale sur les idèles

$$Z(f,s) = \int_{\mathbb{A}_F^\times} f(a)|a|^s\, d^\times a$$

qui est absolument convergente pour $\Re(s) > 1$. Cette fonction admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec au plus deux pôles en $s = 1$ et $s = 0$ dans le cas des corps de nombres et une équation fonctionnelle que nous allons établir en suivant la thèse de Tate. Pour les corps de fonctions on obtient des fractions rationnelles en q^s avec pôles quand $q^s = 1$ ou $q^{1-s} = 1$. On observe aussi que, au moins formellement, si f est décomposée en produit sur toutes les places de F :

$$f = \prod_v f_v$$

on a une formule de produit en terme de fonctions Zeta locales :

$$Z(f,s) = \prod_v Z_v(f_v,s) \qquad \text{avec} \qquad Z_v(f_v,s) = \int_{F_v^\times} f_v(a)|a|_v^s\, d^\times a_v \ .$$

Les intégrales locales sont convergentes pour $\Re(s) > 0$ et le produit est convergent pour $\Re(s) > 1$. La fonction Zeta du corps F est la fonction $Z(f,s)$ où f_v est la fonction auto-duale décrite plus haut ; elle sera notée $Z(s)$.

Pour établir ces propriétés on introduit une fonction auxiliaire

$$\Xi(f,a) = \sum_{\xi \in F^\times} f(a\xi) \ .$$

Cette série est convergente, uniformément pour t dans un compact, puisque F est un sous-groupe discret de $\mathbb{A}_F$ et que f est lisse à “décroissance rapide”. Maintenant, en notant $d^\times\dot{t}$ la mesure sur C_F le groupe des classes d'idèles,

$$Z(f,s)=\int_{C_F}\Xi(f,a)|a|^s\,d^\times a\ .$$

On pose

$$C_F^+=\{a\in C_F,|a|>1\}\qquad\text{et}\qquad C_F^1=\{a\in C_F,|a|=1\}$$

La formule de Poisson montre que

$$\Xi(f,a)+f(0)=|a|^{-1}\left(\Xi(\hat{f},a^{-1})+\hat{f}(0)\right)$$

et il en résulte que, au moins formellement,

$$Z(f,s)=\int_{C_F^+}\left(\Xi(f,a)|a|^s+\Xi(\hat{f},a)|a|^{1-s}+\hat{f}(0)|a|^{1-s}-f(0)|a|^{-s}\right)\,d^\times a+a(f)$$

où

$$a(f)=\int_{a\in C_F^1}\Xi(f,a)\,d^\times a\ .$$

On pose

$$\Phi(f,s)=\int_{a\in C_F^+}\Xi(f,a)|a|^s\,d^\times a\ .$$

Cette intégrale converge pour tout $s\in\mathbb{C}$ et $\Phi(f,s)$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs, pour $\Re(\tau)>0$ on a

$$\int_{C_F^+}|a|^{-\tau}\,d^\times a=\begin{cases}\frac{1}{\tau} & \text{si } F \text{ est un corps de nombres}\\ \frac{q^{-\tau}}{1-q^{-\tau}}=\frac{1}{q^\tau-1} & \text{si } F \text{ est un corps de fonctions}\end{cases}$$

On en déduit la convergence de l'intégrale définissant $Z(f,s)$ pour $\Re(s)>1$ et donc aussi du produit des fonctions Zeta locales.

Si F est un corps de nombres on a

$$Z(f,s)=\Phi(f,s)+\Phi(\hat{f},1-s)-\frac{\hat{f}(0)}{1-s}-\frac{f(0)}{s}$$

en remarquant que le compact C_F^1 est de mesure nulle et donc $a(f)=0$.

Pour un corps de fonctions on a

$$Z(f,s)=\Phi(f,s)+\Phi(\hat{f},1-s)+\frac{\hat{f}(0)}{q^{s-1}-1}-\frac{f(0)}{q^s-1}+a(f)\ .$$

En observant que

$$\frac{1}{q^\tau-1}=\frac{1}{1-q^{-\tau}}-1$$

on obtient

$$Z(f,s)=\Phi(f,s)+\Phi(\hat{f},1-s)-\frac{\hat{f}(0)}{1-q^{s-1}}-\frac{f(0)}{1-q^{-s}}+b(f)$$

avec

$$b(f)=a(f)+f(0)$$

et la formule de Poisson montre que $b(f)=b(\hat{f})$.

On a ainsi obtenu, dans tous les cas, le prolongement méromorphe de $Z(f,s)$ à tout $\mathbb{C}$, l'équation fonctionnelle $Z(f,s)=Z(\hat{f},1-s)$ ainsi que l'existence de pôles en $s=1$ et $s=0$. Le résidu en $s=1$ est $\hat{f}(0)/\log q_F$.

On rappelle enfin que l'on dispose de fonctions f_v auto-duales sur chaque corps local : pour un corps local non-archimédien c'est la fonction caractéristique de l'anneau des entiers et c'est une gaussienne pour les corps archimédiens :

$$f_v(x)=e^{-\pi|x|^2}$$

On dispose ainsi d'une fonction f auto-duale sur $\mathbb{A}_F$. La fonction Zeta du corps F notée simplement $Z(s)$ est obtenue en prenant pour f cette fonction.

Annexe C. PolExp

Problématique. La formule des traces pour les corps de nombres fait intervenir des expressions où apparaissent le volume de convexes relativement compacts définis par des intersections de demi-espaces fermés ou ouverts dans un espace vectoriel réel. Sur les corps de fonctions au lieu du volume c'est le nombre $N(X)$ de points d'un réseau (dans le même espace vectoriel) dans ces convexes qui intervient. On montre que lorsque le paramètre de troncature est rationnel c'est-à-dire $X \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $N(X)$ comme un élément de PolExp c'est-à-dire comme une somme de produits de polynômes et d'exponentielles

$$N(X) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_{\nu,n}(X) e^{2i\pi\nu X} \ .$$

On observera que l'expression dépend du dénominateur n.

Le cas des segments. Le prototype de cette question consiste à compter les points du réseau des entiers dans l'intervalle de $[-X, X] \subset \mathbb{R}$ avec $X > 0$.

Le nombre $N(X)$ de points entiers dans cet intervalle vaut

$$N(X) = 2E(X) + 1 = 2X + 1 - 2\big(X - E(X)\big)$$

où $E(X)$ est la partie entière de X. Maintenant pour $X \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ on a

$$X - E(X) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} a_{\nu,n} e^{2i\pi\nu X}$$

où les $a_{\nu,n}$ sont solution du système linéaire

$$\frac{p}{n} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} a_{\nu,n}\, \xi^{p\nu} \quad \text{avec} \quad \xi = e^{2i\pi/n} \quad \text{pour} \quad 0 \le p < n \ .$$

Dans notre cas on a donc

$$N(X) = P_{0,n}(X) - \sum_{\nu \neq 0} a_{\nu,n} e^{2i\pi\nu X} \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad P_{0,n}(X) = 2X + 1 - 2a_{0,n} \ .$$

On notera $M(\xi)$ la matrice dont les coefficients sont les $\xi^{p\nu}$ avec $0 \le p < n$ et $\nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On observe que

$$M(\xi)^{-1} = \frac{1}{n} M(\xi^{-1}) \quad \text{donc} \quad a_{\nu,n} = \frac{1}{n} \sum_{0 \le p < n} \frac{p}{n} \xi^{-p\nu}$$

et, en particulier,

$$a_{0,n} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} a_{0,n} = 1/2 \ .$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} P_{0,n}(X) = \lim_{n\to\infty} \big(2X + 1 - 2a_{0,n}\big) = 2X \ .$$

On observe que c'est la longueur de l'intervalle $[-X, X]$.

Un autre exemple est celui de l'intervalle semi-fermé $]0, X]$. Dans ce cas le nombre de points entiers est $E(X)$ et

$$E(X) = X - \sum_{\nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} a_{\nu,n} e^{2i\pi\nu X}$$

et à la limite on obtient $(X - 1/2)$.

Ceci n'est pas ce que l'on obtient pour les corps de nombres. Toutefois cela est cohérent avec l'observation suivante : on a une union disjointe

$$[-X, X] = [-X, 0[\cup [0, 0] \cup]0, X]$$

pour lesquels on obtient à la limite

$$(X - 1/2) + 1 + (X - 1/2) = 2X$$

alors que pour les corps de nombres on obtient

$$X + 0 + X = 2X \ .$$

En d'autre termes le passage à la limite reste sensible aux ensembles de mesure nulle.

Références

[A1] Arthur J. *A trace formula for reductive groups I : Terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$*, Duke Math. J. **45**, no. 4 (1978), pp. 911-952.

[A2] Arthur J. *A trace formula for reductive groups II : Applications of a truncation operator*, Compositio Math. **40**, fasc. 1 (1980), pp. 87-121.

[A3] Arthur A. *A measure on the unipotent variety*, Canad. J. Math. **37** (1985), pp. 1237-1274.

[A4] Arthur A. *A stable trace formula I. General expansions*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), pp. 175-277.

[A5] Arthur A. *A stable trace formula II. Global descent*, Invent. Math. **143** (2001), pp. 157-220.

[A6] Arthur A. *A stable trace formula III. Proof of the main theorems*, Ann. of Math. **158** (2003), pp. 769-873

[H] Helgason S. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press. Pure and Applied Mathematics **XII** (1962)

[He] Henniart G., *R*eprésentations des groupes réductifs p-adiques et de leurs sous-groupes distingués cocompacts. Journal of Algebra. **236** (2001), 236-245,

[JL] Jacquet H. , Langlands R. P. *Automorphic Forms on GL(2)* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **114**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Lab1] Labesse J.-P. *L-indistinguishable representations and trace formula for $SL(2)$*, Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), pp. 331-338. Halsted, New York, 1975.

[Lab2] Labesse J.-P. *Nombres de Tamagawa des groupes réductifs quasi-connexes*, Manuscripta Math. 104 (2001), no. 4, pp. 407-430.

[LL] Labesse J.-P., Langlands R. P. *L-indistinguishability for $SL(2)$*, Canad. J. **31**, no. **4**, pp. 726-785, 1979.

[LLe] Labesse J.-P., Lemaire B. *La formule des traces tordue pour un corps global de caractéristique* $p > 0$, Prépublication

[LS] Labesse J.-P., Schwermer J. *Central morphisms and cuspidal automorphic representations.* J. Number Theory 205, pp. 170-193, 2019

[LW] Labesse J.-P., Waldspurger J.-L. *La formule des traces tordue, d'après le Friday Morning Seminar*, CRM Monograph Series **31**, Amer. Math. Soc., 2013.

[Lan] Langlands, Robert P. *Base change for GL(2).* Annals of Mathematics Studies, No. 96 Princeton University Press, Princeton, N.J. and University of Tokyo Press, Tokyo, 1980.

[Le] Lemaire, Bertrand *Intégrabilité locale des caractères de $SL_n(D)$* Pacific J. Math. 222, no. 1, pp. 69-131, 2005.

[R] Ramakrishnan, Dinakar *Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for SL(2)* Ann. of Math. (2) 152 , no. 1, pp. 45-111, 2000.

[MW] Mœglin C., Waldspurger J.-L. *Stabilisation de la formule des traces tordues, Volumes 1 et 2* Progress Math. **316-317**, Birkhäuser, Cham, 2016.

[S] Silberger A., *Isogeny restrictions of irreducible admissible representations are finite direct sums of irreducible admissible representations*, Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979) No. 2, pp. 263-264.

[ST] Shalika J.A., Tanaka S., *On an explicit construction of a certain class of automorphic forms*, Amer. J. Math. **91** (1969) No. 4, 1049-1076.

[Se] A., Selberg *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series.*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956) pp. 47-87.

[W] A., Weil *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires.*, Acta Math. **111** (1964) pp. 143-211.