

# Ondelettes et applications

par **Béatrice PESQUET-POPESCU**

*Ingénieur de l'Institut Polytechnique de Bucarest  
Docteur de l'École Normale Supérieure de Cachan  
Maître de conférences à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris*

et **Jean-Christophe PESQUET**

*Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité  
Docteur de l'Université de Paris-Sud  
Professeur à l'Université de Marne-la-Vallée  
Chercheur au Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS - Supélec) à Gif-sur-Yvette*

<b>1. Analyses temps-fréquence et temps-échelle</b> .....	TE 5 215 – 2
1.1 Limitations de l'analyse de Fourier .....	— 2
1.2 Transformation de Fourier à court terme .....	— 3
1.3 Transformation continue en ondelettes.....	— 3
<b>2. Bases d'ondelettes</b> .....	— 5
2.1 Analyse multirésolution .....	— 5
2.2 Bases orthonormales d'ondelettes .....	— 5
2.3 Ondelettes et bancs de filtres .....	— 6
2.4 Algorithme de Mallat.....	— 7
2.5 Propriétés des ondelettes .....	— 8
2.6 Familles d'ondelettes .....	— 9
2.7 Ondelettes biorthogonales, « lifting » .....	— 11
<b>3. Paquets d'ondelettes</b> .....	— 13
3.1 Bancs de filtres de structures quelconques.....	— 13
3.2 Arbres de décomposition.....	— 14
3.3 Localisation temps-fréquence .....	— 14
3.4 Ondelettes de Malvar .....	— 14
3.5 Choix de la meilleure base.....	— 15
<b>4. Trames d'ondelettes</b> .....	— 16
<b>5. Bases d'ondelettes multidimensionnelles</b> .....	— 16
5.1 Analyses multirésolution séparables.....	— 16
5.2 Ondelettes en quinconce .....	— 18
<b>6. Quelques applications</b> .....	— 19
6.1 Compression d'images .....	— 19
6.2 Débruitage.....	— 22
6.3 Analyse des phénomènes fractals .....	— 24
<b>7. Conclusion</b> .....	— 25
<b>Pour en savoir plus</b> .....	Doc. TE 5 215

**Q**uand on cherche à analyser un signal, il est très fréquent qu'on établisse, de manière explicite ou implicite, une représentation temps-fréquence de ce signal. L'image qu'on peut avoir d'une telle opération est celle de la transcription d'une partition de musique, qui indique au musicien les notes (donc l'information fréquentielle) qu'il doit produire à un moment donné. La transformée de Fourier n'est pas l'outil approprié pour mener cette analyse puisqu'elle masque l'évolution temporelle du signal. Par contre, comme nous le montrerons, la

transformée en ondelettes et ses extensions fournissent des solutions intéressantes dans ce contexte.

Les ondelettes sont issues de l'intuition d'un ingénieur en géophysique, J. Morlet, dans les années 1980. Sous l'impulsion de personnalités scientifiques telles que le physicien A. Grossman [39] ou le mathématicien Y. Meyer [55], les ondelettes se sont imposées comme des outils fondamentaux de l'analyse harmonique moderne.

D'un point de vue applicatif, les ondelettes ont eu une influence importante dans divers domaines : physique, analyse numérique (par exemple, pour la résolution d'équations aux dérivées partielles), statistiques, traitement du signal et des images, vision par ordinateur...

Dans le contexte de traitement du signal dans lequel nous nous placerons, le lien existant entre les décompositions en ondelettes et des outils plus traditionnels que sont les bancs de filtres, confère une certaine légitimité à ces transformations. Les bancs de filtres considérés agissent en divisant le spectre des signaux de manière logarithmique et constituent ainsi d'assez bonnes approximations du mode de fonctionnement des systèmes perceptuels visuel ou auditif humains. Les ondelettes et les techniques multirésolution ont connu un grand succès en traitement d'images pour des problèmes tels que l'estimation de mouvement, la reconnaissance de formes, la recherche dans des bases de données et la transmission progressive d'informations. La propriété essentielle qui est exploitée dans ces applications est la possibilité d'approximer les images à plusieurs échelles, en partant d'une vue « grossière » qu'on vient affiner au cours de traitement successifs.

Dans la suite de cet article, nous présenterons les différentes formes de transformations en ondelettes existant. De façon schématique, on peut en distinguer trois types :

- des représentations très redondantes (transformations continues en ondelettes) ;
- des décompositions parcimonieuses (bases d'ondelettes orthogonales ou biorthogonales, paquets d'ondelettes...) ;
- des solutions intermédiaires (trames d'ondelettes).

Nous indiquerons brièvement comment ces concepts s'étendent aux images et aux données multidimensionnelles. Enfin, nous présenterons quelques applications parmi celles qui nous paraissent les plus significatives.

Notons que les ondelettes font parfois appel à des notions mathématiques avancées et que nous essaierons, tout au long de notre exposé, de contourner les points les plus épineux, au risque de parfois manquer de précision.

## 1. Analyses temps-fréquence et temps-échelle

### 1.1 Limitations de l'analyse de Fourier

Considérons un signal  $s(t)$  à temps continu que nous supposons d'énergie finie :

$$\|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Un outil traditionnel d'analyse de ce signal est sa **transformée de Fourier** [38], définie par :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

Cette transformation fait clairement ressortir le contenu fréquentiel de  $s(t)$  mais ne permet pas aisément de **localiser temporellement** les événements (impulsions, sauts, changements de fréquence...) qui surviennent dans le signal. Pour mieux comprendre ce phénomène, on peut réécrire la transformée de Fourier sous la forme :

$$S(f) = \langle s, e^{i2\pi ft} \rangle$$

où la notation  $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$  désigne de façon formelle le **produit scalaire** de deux signaux  $\beta_1(t)$  et  $\beta_2(t)$  :

$$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1(t)\beta_2^*(t) dt \quad (1)$$

$\beta_2^*(t)$  désignant le complexe conjugué de  $\beta_2(t)$ .

Ce produit scalaire est de module maximal quand ces signaux sont égaux, à un facteur d'amplitude près. On voit ainsi que la valeur de  $|S(f)|$  permet, en quelque sorte, d'évaluer le degré de res-

semblance entre le signal  $s(t)$  et la cisoïde  $e^{i2\pi ft}$ . Cette dernière fonction correspond à une « fréquence pure » et donc est idéale pour mener une analyse spectrale, mais elle oscille sur tout l'axe temporel avec la même amplitude et n'a donc aucun pouvoir de localisation temporelle. Pour pallier cette limitation, il faut construire des représentations faisant intervenir **conjointement le temps et la fréquence** [36], [7].

## 1.2 Transformation de Fourier à court terme

Une première approche consiste à recourir à une transformation de Fourier à court terme du signal. L'analyse de Fourier est alors restreinte à une portion du signal délimitée par une fenêtre  $g(t)$ , lisse et bien localisée autour de l'instant  $t = 0$ , qu'on fait glisser au long de l'axe temporel. La transformation ainsi obtenue s'exprime par :

$$S_c(v, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g^*(t-b)e^{-i2\pi vt} dt = \langle s, g(t-b)e^{i2\pi vt} \rangle \quad (2)$$

La quantité  $|S_c(v, b)|^2$  est appelé **spectrogramme** de  $s(t)$  et fournit une indication sur la quantité d'énergie présente dans le signal autour de la fréquence  $v$  et de l'instant  $b$ .

Quand on analyse un signal, il est important de connaître les localisations en temps et en fréquence des fonctions sur lesquelles on le décompose. Dans le cas présent, ces fonctions appartiennent à la famille (dite de Weyl-Heisenberg)  $\{g(t-b)e^{i2\pi vt}, (b, v) \in \mathbb{R}^2\}$ . La fonction  $g(t)$  peut être caractérisée par deux intervalles :

$$\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right] \text{ et } \left[-\frac{\Delta f}{2}, \frac{\Delta f}{2}\right].$$

qui contiennent 90 % de l'énergie de cette fonction dans le domaine temporel et, respectivement, fréquentiel. Ces intervalles définissent un pavé du plan temps-fréquence. En traduisant  $g(t)$  de  $b$  en temps, on induit simplement un déplacement de  $b$  de ce pavé suivant l'axe temporel, alors que la modulation par  $e^{i2\pi vt}$  correspond à un déplacement de  $v$  de ce pavé suivant l'axe fréquentiel (figure 1). Compte tenu du principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg [36], il est impossible d'avoir à la fois une localisation parfaite en temps et en fréquence (c'est-à-dire un pavé réduit à un point). On peut également montrer que les fenêtres conduisant à la meilleure localisation temps-fréquence possible sont de forme gaussienne. Lorsque des fenêtres de ce type sont choisies, on parle d'**analyse de Gabor**.

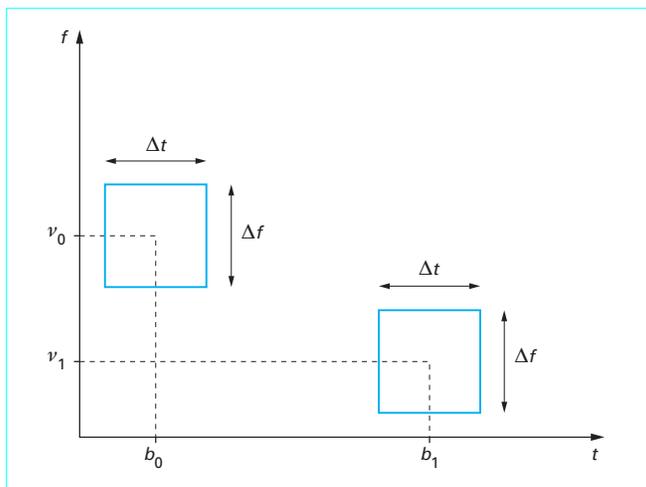


Figure 1 – Localisation temps-fréquence des fonctions d'une famille de Weyl-Heisenberg

Signalons que la transformée de Fourier à court terme fournit une représentation complète du signal, en ce sens qu'on peut l'inverser à l'aide de la formule suivante :

$$s(t) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_c(v, b)g(t-b)e^{i2\pi vt} dv db$$

Dans une version discrète de la transformée de Fourier à court terme, la fréquence prend des valeurs uniformément réparties :  $v = mv_0, m \in \mathbb{Z}$ , de même que le temps :  $b = nb_0, n \in \mathbb{Z}$ . Pour un  $n$  fixé, les coefficients :

$$S_{cd}(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g^*(t-nb_0)e^{-i2\pi mv_0 t} dt \quad (3)$$

caractérisent le contenu fréquentiel de  $s(t)$  dans un voisinage de  $nb_0$ . En faisant varier  $n$ , on analyse le signal au cours du temps et l'ensemble des coefficients  $S_{cd}(m, n)$ , pour  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ , nous permettent de le reconstruire quand  $v_0 b_0 \leq 1$  (sous certaines conditions sur  $g(t)$ ) [27], [28].

## 1.3 Transformation continue en ondelettes

La transformée en ondelettes constitue une alternative à l'analyse temps-fréquence que nous venons de décrire. La transformée continue en ondelettes est donnée par [17] :

$$C(\alpha, b) = |\alpha|^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi^*(\alpha(t-b))dt = \langle s, |\alpha|^{1/2} \psi(\alpha(t-b)) \rangle, \alpha \neq 0 \quad (4)$$

où  $\psi(t)$  est une fonction d'énergie finie.

La quantité  $|C(\alpha, b)|^2$  est appelée **scalogramme** de  $s(t)$ .

Si l'on compare les formules (2) et (4), on observe que la famille de fonctions  $\{|\alpha|^{1/2} \psi(\alpha(t-b)), (\alpha, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$  se substitue ici à la famille de Weyl-Heisenberg. Cette famille de fonctions est formée de **dilatées/contractées** (selon que  $|\alpha| < 1$  ou  $|\alpha| > 1$ ) et **translatées** de  $\psi(t)$  (figure 2). On dit qu'il s'agit d'une **famille d'ondelettes** dont  $\psi(t)$  est l'**ondelette mère**. Notons que le facteur  $|\alpha|^{1/2}$  joue seulement le rôle d'un terme de normalisation assurant que chaque ondelette de la famille est de même énergie  $\|\psi\|^2$ .

Supposons que  $\psi(t)$  soit associée au pavé

$$\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right] \times \left[\bar{f} - \frac{\Delta f}{2}, \bar{f} + \frac{\Delta f}{2}\right]$$

dans le demi-plan temps-fréquence correspondant aux fréquences positives,  $\bar{f}$  étant la fréquence moyenne sur le demi-axe des fréquences positives. L'ondelette  $|\alpha|^{1/2} \psi(\alpha(t-b))$  est localisée temporellement autour de l'instant  $b$ , qui est appelé **paramètre de localisation**.

Quand  $\alpha$  varie, l'ondelette change d'échelle, ce qui lui permet de couvrir différentes bandes de fréquence. Par exemple, si  $\alpha > 1$ , la contractée  $\psi(\alpha t)$  de l'ondelette mère a un support plus étalé en fréquence,  $\left[\alpha \bar{f} - \alpha \frac{\Delta f}{2}, \alpha \bar{f} + \alpha \frac{\Delta f}{2}\right]$ , et plus étroit en temps,  $\left[-\frac{\Delta t}{2\alpha}, \frac{\Delta t}{2\alpha}\right]$ . Une valeur élevée de  $|\alpha|$  correspond à des échelles fines ou à des hautes fréquences alors qu'une faible valeur correspond à des échelles grossières ou à de basses fréquences (figure 3). Le paramètre  $1/\alpha$  est appelé **facteur d'échelle**.

L'analyse temps-échelle ainsi obtenue se révèle souvent mieux adaptée aux caractéristiques des signaux naturels et à notre façon de les percevoir, que celle fournie par la transformée de Fourier à court terme. La figure 5 montre un exemple de transformation en ondelettes d'un signal élémentaire représenté sur la figure 4.

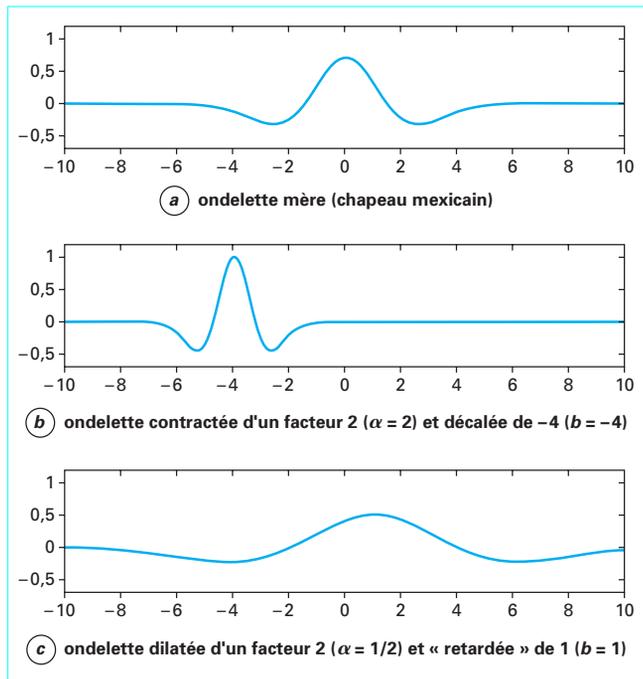


Figure 2 – Exemple de transformations continues en ondelettes

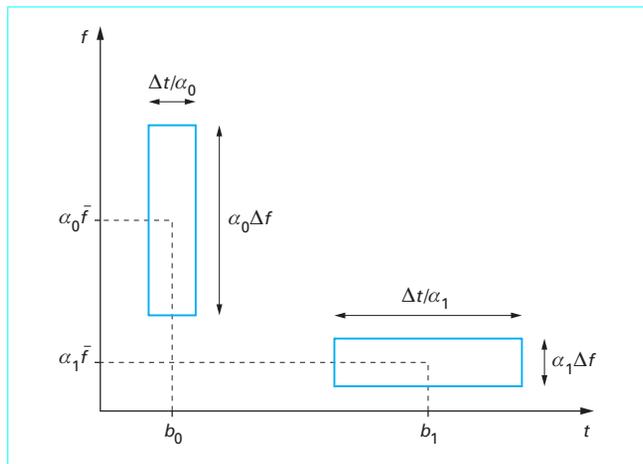


Figure 3 – Localisation temps-fréquence des ondelettes ( $\alpha_0 > \alpha_1 > 0$ )

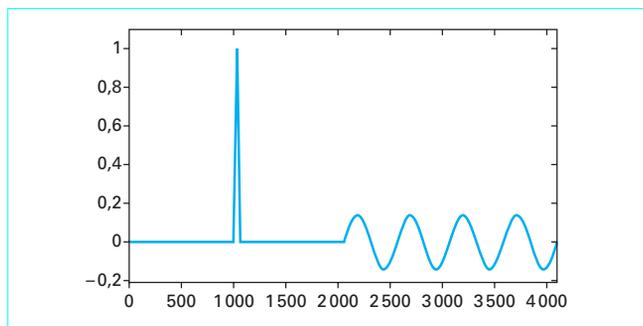


Figure 4 – Signal considéré

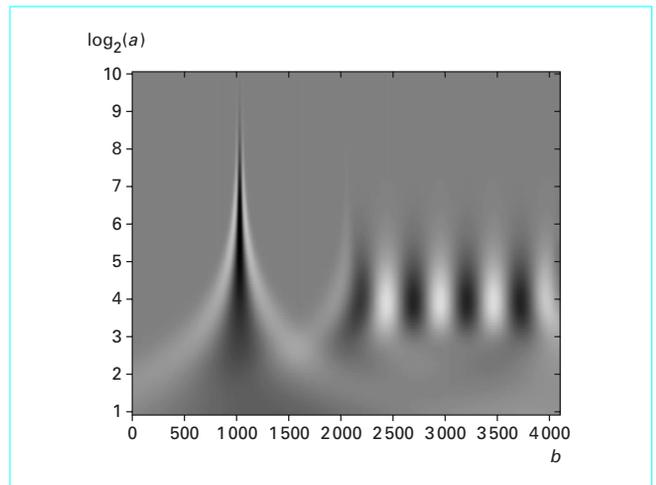


Figure 5 – Transformée en ondelettes du signal de la figure 4 représentée en niveaux de gris. (L'ondelette mère est ici un chapeau mexicain.)

Une propriété importante de la transformée en ondelettes est que le signal peut être reconstruit à partir de  $C(\alpha, b)$ , en employant la relation suivante :

$$s(t) = \frac{1}{K_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha, b) |\alpha|^{1/2} \psi(\alpha(t-b)) d\alpha db \quad (5)$$

avec 
$$K_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df$$

$\Psi(f)$  étant la transformée de Fourier de l'ondelette mère. La formule d'inversion (5) nécessite que la constante  $K_\Psi$  soit finie. Cette dernière condition (dite d'admissibilité) implique que :

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6)$$

ce qui signifie que l'ondelette mère est de « moyenne » nulle.

Parmi les choix usuels pour la fonction  $\psi(t)$ , mentionnons :

— le chapeau mexicain :

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}\sigma} \left( 1 - \frac{t^2}{\sigma^2} \right) \exp\left( -\frac{t^2}{2\sigma^2} \right), \quad \sigma > 0$$

— l'ondelette de Morlet :

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\sigma}} \exp\left( -\frac{t^2}{2\sigma^2} + i2\pi \bar{f} t \right), \quad \sigma > 0$$

La première ondelette est rigoureusement admissible alors que la seconde l'est approximativement quand le produit  $\sigma \bar{f}$  est grand (typiquement,  $2\pi \sigma \bar{f} \approx 5$ ). Le graphe du chapeau mexicain est tracé sur la figure 2a pour  $\sigma = 3/2$ , et celui de l'ondelette de Morlet est donné par la figure 6.

L'équation (5) permet d'exprimer  $s(t)$  en fonction des ondelettes. Cette représentation intégrale fait intervenir les ondelettes correspondant à toutes les localisations temporelles et à tous les facteurs d'échelle, ce qui la rend difficile à mettre en œuvre. À cet égard, il serait plus commode de disposer d'un développement du signal sur un ensemble dénombrable d'ondelettes. Nous allons voir que cela est possible si l'on fait varier le facteur d'échelle de façon dyadique, en choisissant  $\alpha = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , et si l'on prend  $b = k2^j$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Nous allons pour cela revenir sur la notion d'analyse à plusieurs échelles ou **multirésolution**.

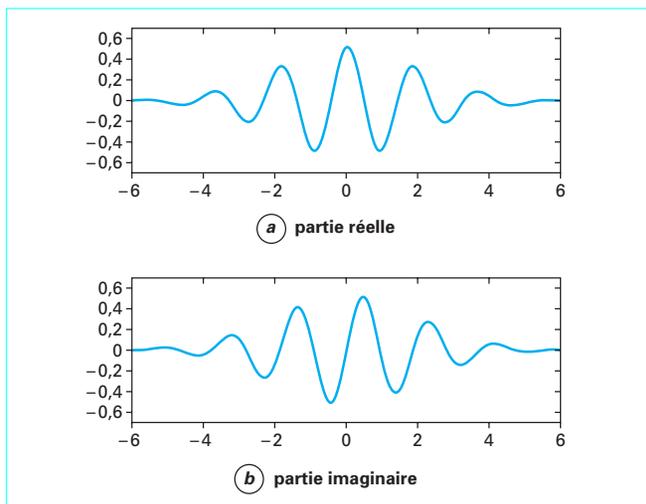


Figure 6 – Parties réelle et imaginaire de l’ondelette de Morlet pour  $\sigma = 1$  et  $2\pi\sigma f = 5$

## 2. Bases d’ondelettes

### 2.1 Analyse multirésolution

Lorsqu’un cameraman effectue un « zoom », il part d’une vision globale des choses, que nous qualifierons d’approximation grossière, pour se focaliser sur une zone d’intérêt, en faisant apparaître en plus de détails par rapport à la première image. Voyons comment formaliser ce type d’approximation multirésolution [55], [50], [49], [51], en nous plaçant dans l’espace  $L^2(\mathbb{R})$  des signaux d’énergie finie, muni du produit scalaire (1).

**Définition.** Une **analyse multirésolution** (AMR) de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite de sous-espaces vectoriels (fermés) de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant les conditions suivantes :

- $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  constitue une suite d’espaces emboîtés :
 
$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_{j+1} \subset V_j \quad (7)$$
- $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \{0\}$ ,  
 $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- Une fonction  $s(t)$  appartient à  $V_j$  si et seulement si sa dilataée  $s(t/2)$  appartient à  $V_{j+1}$ .
- Il existe  $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , appelée **fonction d’échelle** ou **ondelette père** telle que  $\{\varphi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormale de  $V_0$ .

Dans ce contexte, l’AMR d’un signal  $s(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  consiste à calculer les projections orthogonales de  $s(t)$  sur les espaces  $V_j, j \in \mathbb{Z}$ .

Donnons maintenant quelques explications intuitives concernant cette définition ainsi que certaines de ses conséquences :

- la relation d’inclusion (7) nous indique que  $V_{j+1}$  est un sous-espace de  $V_j$ . Ainsi, la projection d’un signal sur  $V_{j+1}$  constitue nécessairement une moins bonne approximation de ce signal que sa projection sur  $V_j$ . Par ailleurs, la relation (7) peut être interprétée comme une propriété de causalité qui montre que l’approximation sur  $V_j$  contient toute l’information nécessaire pour calculer l’approximation sur  $V_{j+1}$  ;
- les conditions 2 signifient que, quand  $j$  tend vers  $\infty$ , on perd toutes les informations sur le signal alors que, quand  $j$  tend

vers  $-\infty$ , l’approximation est asymptotiquement égale au signal d’origine ;

- d’après la condition 3, on passe de  $V_j$  à  $V_{j+1}$  en multipliant par 2 le facteur d’échelle. Pour cette raison,  $j$  est appelé **niveau de résolution**. Par récursivité, on déduit facilement de cette propriété que, quel que soit  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $s(t)$  appartient à  $V_0$  si et seulement si  $s(t/2^j)$  appartient à  $V_j$  ;
- de plus, la condition 4 implique que, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , l’espace  $V_j$  est invariant par translation d’un multiple de  $2^j$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad s(t) \in V_j \Rightarrow s(t - k2^j) \in V_j.$$

Les deux derniers résultats se traduisent par le fait que

$$\{2^{-j/2} \varphi(t/2^j - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

constitue une base orthonormale de  $V_j$ .

### 2.2 Bases orthonormales d’ondelettes

L’AMR d’un signal  $s(t)$  consiste donc à réaliser des **projections successives**  $\text{proj}_{V_j} s(t)$  du signal sur les espaces  $V_j$ , ce qui conduit à des approximations de plus en plus grossières de  $s(t)$ , au fur et à mesure que  $j$  croît. La différence entre deux approximations consécutives,  $\text{proj}_{V_{j-1}} s(t)$  et  $\text{proj}_{V_j} s(t)$ , représente l’information de « détails », qui existait à l’échelle  $2^{j-1}$  et qui est perdue à l’échelle  $2^j$ . Cette information est contenue dans le sous-espace  $W_j$  orthogonal à  $V_j$  tel que :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (8)$$

où le symbole  $\oplus$  désigne la somme directe de sous-espaces vectoriels. La projection orthogonale  $\text{proj}_{W_j} s(t)$  du signal sur ce sous-espace donne l’information de « détails » au niveau de résolution  $j$ . Compte tenu de la relation (8), la projection sur  $V_{j-1}$  peut être décomposée en la somme des projections sur  $V_j$  et  $W_j$  :

$$\text{proj}_{V_{j-1}} s(t) = \text{proj}_{V_j} s(t) + \text{proj}_{W_j} s(t)$$

Les figures 7 et 8 illustrent ces concepts pour une forme particulière de  $s(t)$ .

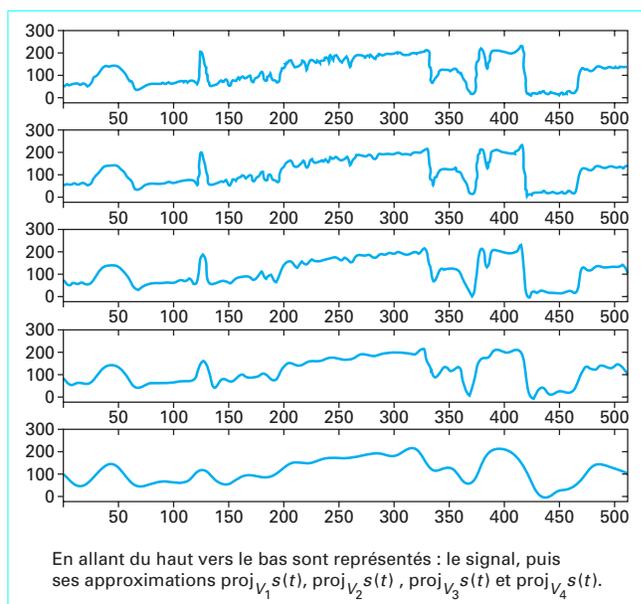


Figure 7 – Exemple d’AMR d’un signal

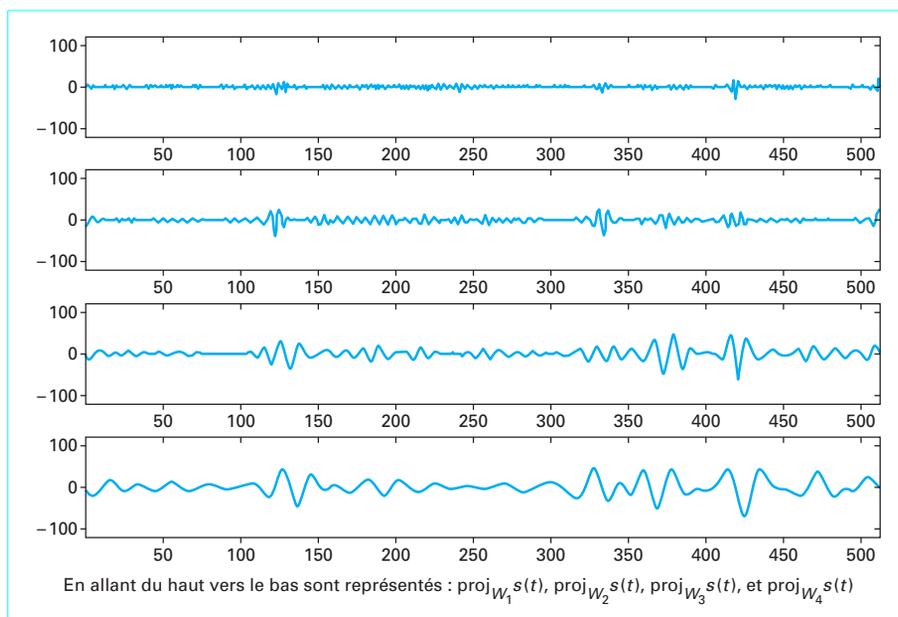


Figure 8 – Projections sur les espaces de détails correspondant à l’analyse du signal de la figure 7

Un point essentiel est qu’il existe une ondelette mère  $\psi(t)$  telle que  $\{2^{-j/2}\psi(t/2^j - k), k \in \mathbb{Z}\}$  soit une base orthonormale de  $W_j$ . Par ailleurs, en considérant l’union de toutes ces familles de fonctions quand  $j$  varie, et en exploitant la condition 2 de l’AMR, on peut montrer que  $\{2^{-j/2}\psi(t/2^j - k), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$  est une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ . Par le biais de l’AMR, on peut donc construire des bases orthonormales d’ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 2.3 Ondelettes et bancs de filtres

La propriété d’inclusion (7) implique que  $V_1$  est un sous-espace vectoriel de  $V_0$ . Par conséquent, on peut écrire toute fonction de  $V_1$  comme une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi(t - \ell), \ell \in \mathbb{Z}$ , qui forment une base de  $V_0$ . Étant donné que  $2^{-1/2}\varphi(t/2) \in V_1$ , on en déduit qu’il existe une suite  $(h_0|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  telle que :

$$\frac{1}{2^{1/2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_0|\ell| \varphi(t - \ell) \tag{9}$$

Le caractère orthonormal de la famille  $\{\varphi(t - \ell), \ell \in \mathbb{Z}\}$  nous permet alors d’obtenir comme expression des coefficients  $h_0|\ell|$  :

$$h_0|\ell| = \left\langle \frac{1}{2^{1/2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right), \varphi(t - \ell) \right\rangle$$

L’équation (9) est appelée **équation à 2 échelles** car elle lie la dilatée d’un facteur 2 de  $\varphi(t)$  à des translatées de cette fonction. Par simple changement de variables dans (9), on obtient, de façon plus générale, une équation à 2 échelles entre les niveaux de résolution  $j$  et  $j + 1$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2^{j+1}}\varphi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_0|\ell - 2k| \frac{1}{2^{j/2}}\varphi\left(\frac{t}{2} - \ell\right) \tag{10}$$

La suite  $(h_0|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  peut être interprétée comme la réponse impulsionnelle d’un filtre qui joue un rôle fondamental dans la caractérisation d’une AMR. La réponse fréquentielle de ce filtre est la transformée de Fourier de  $(h_0|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  :

$$H_0(f) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_0|\ell| e^{-i2\pi f \ell}$$

Cette réponse fréquentielle est une fonction périodique, de période 1, qui est soumise à certaines restrictions. Ainsi, on peut montrer que :

$$H_0(0) = \sqrt{2} \tag{11}$$

Une autre propriété importante, qui est une conséquence de l’orthonormalité de la famille  $\{\varphi(t - \ell), \ell \in \mathbb{Z}\}$  est la suivante :

$$\forall f \in [0, 1], |H_0(f)|^2 + |H_0(f + 1/2)|^2 = 2 \tag{12}$$

On peut par ailleurs vérifier (voir [19] pour plus de précisions) que, une fois le filtre choisi, on obtient une unique fonction d’échelle dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$\Phi(f) = \prod_{p=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{1/2}} H_0\left(\frac{f}{2^p}\right) \right)$$

On peut raisonner sur les espaces de détails  $W_j$  de la même façon que nous l’avons fait sur les espaces d’approximation  $V_j$ .

Les ondelettes

$$\left\{ 2^{-\frac{j+1}{2}} \psi(t/2^{j+1} - k), k \in \mathbb{Z} \right\},$$

qui forment une base de  $W_{j+1} \subset V_j$ , peuvent ainsi être décomposées sur la base orthonormale  $\{2^{-j/2}\varphi(t/2^j - \ell), \ell \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_j$  selon la relation :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2^{j+1}}\psi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_1|\ell - 2k| \frac{1}{2^{j/2}}\varphi\left(\frac{t}{2} - \ell\right) \tag{13}$$

La suite  $(h_1|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  s’interprète aussi comme la réponse impulsionnelle d’un filtre. L’orthonormalité de la famille

$$\left\{ 2^{-\frac{j+1}{2}} \psi(t/2^{j+1} - k), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

se traduit par une condition similaire à (12) sur la réponse fréquentielle  $H_1(f)$  de ce filtre :

$$\forall f \in [0, 1], |H_1(f)|^2 + |H_1(f + 1/2)|^2 = 2 \tag{14}$$

alors que l'orthogonalité des sous-espaces  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$  de  $V_j$  équivaut à :

$$\forall f \in [0, 1[, H_0(f)H_1^*(f) + H_0(f+1/2)H_1^*(f+1/2) = 0 \quad (15)$$

Les relations (12), (14) et (15) peuvent être réunies en une seule condition qui est celle de **para-unitarité**. Cette dernière s'exprime par le fait que la matrice

$$\mathbf{M}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_0(f) & H_1(f) \\ H_0(f+1/2) & H_1(f+1/2) \end{bmatrix}$$

est unitaire, pour tout  $f \in [0, 1[$  (ce qui signifie que la somme des modules au carré des éléments sur chaque colonne/ligne de la matrice est égale à 1 et que le produit scalaire des colonnes/lignes est nul). Si l'on considère la première ligne de la matrice  $\mathbf{M}(f)$ , on a :

$$\forall f \in [0, 1[, |H_0(f)|^2 + |H_1(f)|^2 = 2,$$

ce qui, combiné à (11), implique que :

$$H_1(0) = 0 \quad (16)$$

Les conditions (11) et (16) suggèrent que les filtres de réponses impulsionnelles  $(h_0|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  et  $(h_1|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  doivent être respectivement passe-bas et passe-haut.

## 2.4 Algorithme de Mallat

### 2.4.1 Décomposition

Dans le cadre que nous venons de décrire, la décomposition en ondelettes orthogonales d'un signal  $s(t)$  peut être effectuée de manière très efficace. Pour cela, on détermine, à chaque niveau de résolution  $j$ , les approximations  $\text{proj}_{V_j} s(t)$  et les informations de détails  $\text{proj}_{W_j} s(t)$  du signal. Les familles  $\{2^{-j/2} \varphi(t/2^j - k), k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{2^{-j/2} \psi(t/2^j - k), k \in \mathbb{Z}\}$  étant des bases orthonormales respectives des espaces  $V_j$  et  $W_j$ , on a :

$$\text{proj}_{V_j} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j|k} \frac{1}{2^{j/2}} \varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$$

$$\text{proj}_{W_j} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j|k} \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$$

avec

$$a_{j|k} = \left\langle s(t), \frac{1}{2^{j/2}} \varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \right\rangle \quad (17)$$

$$c_{j|k} = \left\langle s(t), \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \right\rangle \quad (18)$$

Les coefficients  $a_{j|k}$  et  $c_{j|k}$  sont appelés respectivement **coefficients d'approximation** et **coefficients d'ondelettes** (ou de détails) du signal, au niveau de résolution  $j$ .

Il serait lourd de calculer directement l'ensemble des produits scalaires (17) et (18) par intégration sur  $\mathbb{R}$ . Fort heureusement, les équations à 2 échelles permettent de mettre en évidence des relations récursives qui simplifient ces calculs. Plus précisément, en combinant (17) et (10), on vérifie aisément que :

$$a_{j|k} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j-1|\ell} h_0^*|\ell - 2k| \quad (19)$$

et, de façon similaire, on a :

$$c_{j|k} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j-1|\ell} h_1^*|\ell - 2k| \quad (20)$$

À partir des coefficients d'approximation du signal à une échelle donnée  $2^{j-1}$ , on peut ainsi déterminer ses coefficients d'approximation et d'ondelettes à l'échelle deux fois plus grande. Les équations (19) et (20) définissent les opérations à réaliser à chaque niveau de résolution : un traitement par le filtre de réponse impulsionnelle  $(\tilde{h}_0|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}} = (h_0^*|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  ou  $(\tilde{h}_1|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}} = (h_1^*|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ , suivi d'une **décimation** (appelée aussi *sous-échantillonnage*) d'un facteur 2. En effet, soit  $\tilde{a}_j|k|$  le signal à temps discret obtenu par convolution de  $a_{j-1}|k|$  et  $\tilde{h}_0|k|$ ,

$$\tilde{a}_j|k| = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j-1|\ell} h_0^*|\ell - k|$$

Après décimation, il ne subsiste qu'un échantillon sur 2 de cette suite, ce qui conduit à  $\tilde{a}_j|2k| = a_j|k|$ . De la même manière, on a, en sortie du second filtre :

$$\tilde{c}_j|k| = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j-1|\ell} h_1^*|\ell - k|,$$

et, à la suite de la décimation, on obtient  $\tilde{c}_j|2k| = c_j|k|$ . Ces opérations permettent le passage du niveau de résolution  $j-1$  au niveau de résolution  $j$ . Elles sont résumées sur la figure 9, où  $2\downarrow$  symbolise l'opération de décimation d'un facteur 2. La structure représentée constitue un **banc de filtres d'analyse en quadrature miroir** [76], [77], [71].

Comme le montre la figure 10, la mise en cascade de ces bancs de filtres conduit à une décomposition du signal sur plusieurs niveaux de résolution. L'algorithme décrit nécessite cependant de disposer des coefficients d'approximation à un niveau de résolution initial, pris par convention égal à 0. Ces coefficients peuvent se calculer à l'aide de la relation (17) mais, dans la pratique, on se contente souvent de les approximer par des valeurs obtenues après échantillonnage régulier du signal analysé [63]. À l'issue de la décomposition, on obtient les coefficients d'approximation du signal au niveau de résolution  $j_{\max}$  correspondant à l'échelle la plus grossière jusqu'où l'analyse a été poussée. Par ailleurs, on génère les coefficients d'ondelettes à tous les niveaux de résolutions  $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$ . Si les coefficients d'approximation au niveau de résolution 0 forment une suite de  $K$  valeurs, il semble cohérent de choisir  $j_{\max}$  strictement inférieur à  $\log_2(K) + 1$ .

### 2.4.2 Reconstruction

Dans la pratique, ces coefficients sont généralement traités (par exemple, il peuvent être transmis de façon progressive sur un canal de télécommunication). Après cela, il est souvent nécessaire de reconstituer le signal original ou, plus exactement, une version « traitée » de ce dernier. On emploie à cette fin un **banc de filtres de synthèse** (cf. figure 11) qui réalise les opérations **duales** de celles effectuées lors de l'analyse : une **interpolation** d'un facteur 2 de l'entrée de chaque canal, puis un filtrage. L'interpolation, qu'on sym-

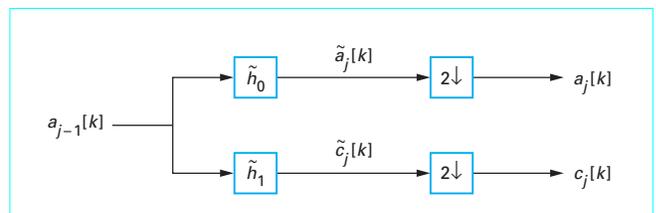


Figure 9 – Banc de filtres d'analyse

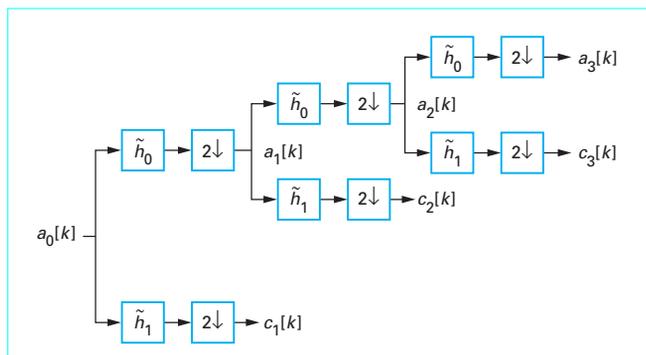


Figure 10 – Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution

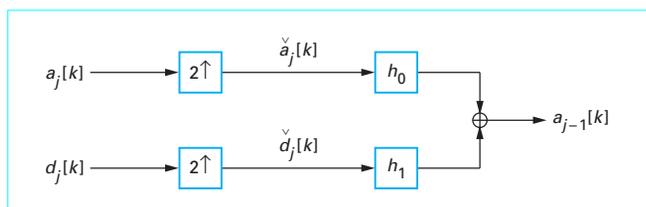


Figure 11 – Banc de filtres de synthèse

bolise par  $2^{\uparrow}$ , consiste à intercaler un zéro entre 2 échantillons consécutifs du signal d'entrée. Par exemple, en interpolant  $(a_j|k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , on obtient :

$$\check{a}_j|k| = \begin{cases} a_j|k/2| & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les filtres de synthèse sont de réponses impulsionnelles  $(h_0|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  et  $(h_1|\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ . La formule permettant de revenir à une échelle plus fine, en passant du niveau de résolution  $j$  au niveau de résolution  $j-1$ , est alors donnée par :

$$a_{j-1}|k| = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_0|k-2\ell| a_j|\ell| + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_1|k-2\ell| c_j|\ell| \quad (21)$$

La figure 12 donne le schéma d'inversion de la décomposition de la figure 10.

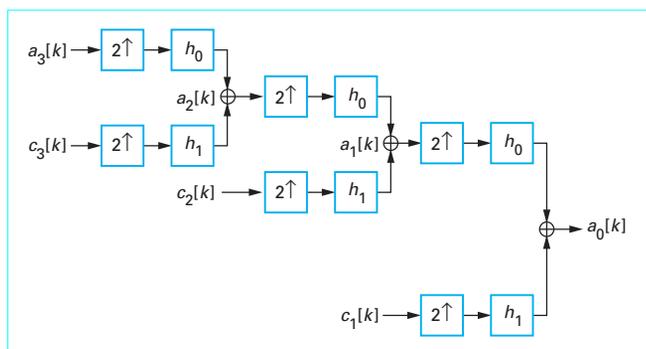


Figure 12 – Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes

### 2.4.3 Variante périodisée

On remplace parfois l'opération de convolution mise en œuvre dans les filtres des figures 9 et 11 par une convolution périodique (ou cyclique). L'avantage est que, partant de  $K$  valeurs discrètes, on génère au niveau de résolution  $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$  exactement  $K2^{-j}$  coefficients  $d_j|k|$  (ou  $a_j|k|$ ), si  $K$  est multiple de  $2^{j_{\max}}$ . Cependant, on ne réalise plus à proprement parler une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$ . Il s'agit d'une **décomposition en ondelettes périodiques**.

### 2.4.4 Complexité

Si des filtres de réponses impulsionnelles finies, de faible longueur  $L$ , sont employés, on peut montrer que cette méthode récursive requiert environ  $2KL$  opérations élémentaires (additions et multiplications confondues) pour décomposer ou reconstruire un signal de longueur  $K$ . En terme de complexité de calculs, elle apparaît donc comme une méthode compétitive par rapport à une transformée de Fourier rapide directe ou inverse [64].

## 2.5 Propriétés des ondelettes

Supposons que l'on dispose d'une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$  de fonction d'échelle  $\varphi(t)$ . Conformément à la relation (13) (en fixant  $j=-1$  et  $k=0$ ), une façon simple de définir l'ondelette mère consiste à prendre :

$$\psi(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_1|\ell| \sqrt{2} \varphi(2t-\ell) \Leftrightarrow \Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \quad (22)$$

avec

$$H_1(f) = (-e^{-i2\pi(2p+1)f}) H_0^*\left(f + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow h_1|\ell| = (-1)^\ell h_0^*|2p+1-\ell| \quad (23)$$

où  $p$  est un entier quelconque.

On vérifie, en effet, que la condition (23) permet d'assurer que (14) et (15) sont vérifiées, dès que (12) l'est.

Un paramètre important pour une ondelette est son **nombre de moments nuls**. L'ondelette mère  $\psi(t)$  possède  $N$  moments nuls si elle est « orthogonale » à tous les polynômes de degrés strictement inférieurs à  $N$ , ce qui équivaut à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2} - k\right) dt = 0, \quad \text{pour tout } m \in \{0, \dots, N-1\} \quad (24)$$

Cela signifie qu'un signal s'identifiant à un polynôme de degré (au plus)  $N-1$  sur l'intervalle de temps où il est étudié, a toute son énergie concentrée sur ses coefficients d'approximation, ses coefficients d'ondelettes étant nuls.

En utilisant les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier, on peut réécrire la condition (24) sous la forme :

$$\frac{d^m \Psi(0)}{df^m} = 0, \quad \text{pour tout } m \in \{0, \dots, N-1\} \quad (25)$$

Du fait de la relation (22), on peut montrer que (25) équivaut à :

$$\frac{d^m H_1(0)}{df^m} = 0, \quad \text{pour tout } m \in \{0, \dots, N-1\} \quad (26)$$

Le nombre  $N$  se réduit ainsi au nombre de dérivées nulles en 0 de la réponse fréquentielle du filtre passe-haut de l'AMR. On peut ainsi dire que ce filtre possède un zéro d'ordre  $N$  à la fréquence nulle. Plus on exige un nombre grand de moments nuls, plus on contraint sa réponse fréquentielle à être « plate » au voisinage de l'origine. Remarquons que, d'après la relation (16), on a nécessairement au moins un moment nul ( $N \geq 1$ ) et, par conséquent, la condition (6) est toujours vérifiée.

On déduit de la propriété (26) que le filtre passe-bas, lié au filtre passe-haut de l'AMR par la relation (23), possède un zéro d'ordre  $N$  à la fréquence  $1/2$ .

## 2.6 Familles d'ondelettes

L'un des avantages de l'AMR est de fournir un cadre précis pour la conception de bases d'ondelettes. Différentes familles d'ondelettes peuvent être obtenues, selon la façon dont sont construites les approximations multirésolution du signal.

### 2.6.1 Ondelettes de Shannon-Nyquist

Une façon naturelle de générer une suite d'approximations de moins en moins fines du signal analysé  $s(t)$  est de réduire graduellement sa bande passante. Pour construire les ondelettes de Shannon-Nyquist, on part d'une AMR où l'on vient tronquer les composantes spectrales  $S(f)$  du signal au delà des fréquences  $\pm 2^{-j-1}$ . Les espaces d'approximations correspondants sont donnés par :

$$V_j = \{s(t) \in L^2(\mathbb{R}) \mid S(f) = 0 \text{ pour } |f| \geq 2^{-j-1}\}$$

Le nom des ondelettes résultantes provient du lien avec le célèbre théorème d'échantillonnage (dit de Shannon-Nyquist) [62] qui nous assure que des signaux à bande limitée tels que ceux appartenant à  $V_j$  peuvent être reconstruits, sans perte d'information, à partir de leurs échantillons, pourvu que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure ou égale à  $2^j$ . Plus précisément, en se plaçant à la fréquence de Nyquist  $2^j$ , on a pour tout signal  $s(t) \in V_j$  :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(2^j k) \operatorname{sinc} \left( \pi \left( \frac{t}{2^j} - k \right) \right) \quad (27)$$

où  $\operatorname{sinc}(t)$  désigne la fonction sinus cardinal définie par :

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La transformée de Fourier de  $\operatorname{sinc}(\pi t)$  est l'impulsion rectangulaire  $r_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(f)$  valant 1 sur l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et 0 ailleurs. Ce fait

associé à la formule (27) permet de montrer que l'ensemble des fonctions  $\{2^{-j/2} \operatorname{sinc}(\pi(t/2^j - k))\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  forme une base orthonormale de  $V_j$ . Ainsi, la fonction d'échelle est tout simplement :

$$\varphi(t) = \operatorname{sinc}(\pi t)$$

En écrivant sous forme fréquentielle l'équation à 2 échelles (9) :

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right)$$

on peut déduire le filtre passe-bas de cette AMR. Il s'agit d'un passe-bas idéal de fréquence de coupure  $1/4$  et de réponse fréquentielle égale à  $\sqrt{2}$  dans sa bande passante. On peut choisir le filtre complémentaire (passe-haut idéal de fréquence de coupure  $1/4$ , de réponse fréquentielle égale à  $\sqrt{2}$  dans sa bande passante) comme second filtre de l'AMR. Sa réponse fréquentielle  $H_1(f)$  vérifie effectivement

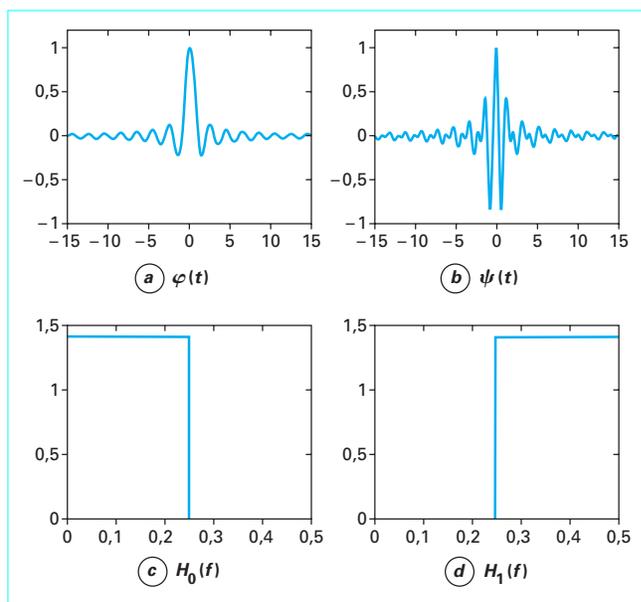


Figure 13 – AMR de Shannon-Nyquist : allures des fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $H_0(f)$  et  $H_1(f)$

les conditions (14) et (15). À l'aide des relations précédentes et de (22), on peut déterminer l'expression de l'ondelette mère :

$$\psi(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$$

Les éléments caractéristiques de cette AMR sont représentés sur la figure 13.

En raison du caractère idéal des filtres correspondant à cette AMR, les ondelettes de Shannon-Nyquist sont très bien localisées d'un point de vue fréquentiel. En revanche, comme le montre l'expression ci-dessus, leur pouvoir de localisation temporelle est assez limité.

### 2.6.2 Ondelettes de Haar

On aboutit aux ondelettes de Haar en partant d'un point de vue diamétralement opposé qui met l'accent sur la représentation temporelle du signal. Ce dernier est approximé à l'aide de fonctions en escalier dont les « marches » s'élargissent au fur et à mesure que  $j$  croît.

L'AMR est définie à partir des sous-espaces :

$$V_j = \{s(t) \in L^2(\mathbb{R}) \mid \forall k \in \mathbb{Z}, s(t) \text{ est constante pour } t \in [2^j k, 2^j(k+1)]\}$$

La famille de fonctions  $\{2^{-j/2} r_{[2^j k, 2^j(k+1)]}(t), k \in \mathbb{Z}\}$  constituant une base orthonormale de  $V_j$ , la fonction d'échelle de cette AMR est  $\varphi(t) = r_{[0, 1]}(t)$ . Cette dernière vérifie clairement la relation :

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \varphi(t) + \varphi(t-1)$$

Si on l'identifie à l'équation (9), cette relation nous fournit comme réponse impulsionnelle du filtre passe-bas de l'AMR :

$$h_0[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut utiliser la relation (23) pour effectuer le choix du filtre passe-haut associé, ce qui, en prenant  $p = 0$ , conduit à :

$$h_1[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces filtres n'ont que deux coefficients non nuls et sont donc très faciles à implanter. Au contraire, ceux correspondant aux ondelettes de Shannon-Nyquist ont des réponses impulsionnelles faisant intervenir une infinité de termes et il est impossible de les mettre en œuvre de façon exacte.

La formule (22) nous permet de calculer l'ondelette mère, qui s'écrit :  $\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1)$ .

Les graphes de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère sont donnés par les figures 14a et b. Les réponses fréquentielles des filtres passe-bas et passe-haut de l'AMR sont tracées sur les figures 14c et d. La forme de  $\varphi(t)$  met en évidence la dualité existant avec la fonction d'échelle de Shannon-Nyquist, qui a la même allure rectangulaire dans le domaine spectral. À l'inverse des ondelettes de Shannon-Nyquist, celles de Haar sont bien localisées temporellement mais mal localisées fréquemment.

### 2.6.3 Ondelettes splines

D'un point de vue pratique, il est intéressant de pouvoir synthétiser des ondelettes qui fournissent des solutions intermédiaires entre les cas extrêmes que constituent les deux analyses temps-fréquence précédentes. Pour y parvenir, on peut reprendre l'idée à l'origine de l'AMR de Haar en approximant le signal par morceaux, sur chaque intervalle  $[2^j k, 2^j(k+1)[$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Cependant, afin d'obtenir des approximations multirésolution « lisses », on approxime le signal, sur chacun de ces intervalles, non plus par une constante mais par un polynôme d'un certain degré  $N$ . Toujours par souci de régularité, on impose à ces approximations d'être de dérivées continues, jusqu'à l'ordre  $N-1$ , aux « points de raccord » situés en  $2^j k, k \in \mathbb{Z}$ .

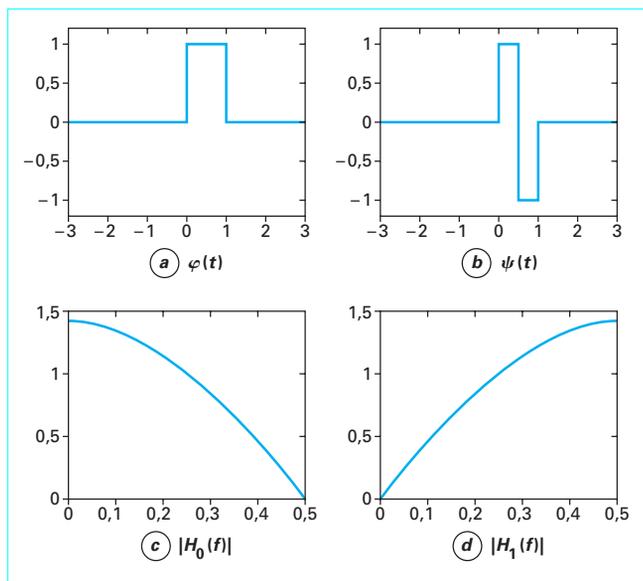


Figure 14 – AMR de Haar : allures des fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $|H_0(f)|$  et  $|H_1(f)|$

Les fonctions polynomiales par morceaux telles que celles que nous venons de décrire sont connues sous le nom de **splines**. Les splines constituent des outils traditionnels d'approximation en analyse fonctionnelle [75] et il est intéressant d'observer qu'ils ne sont pas sans lien avec le concept d'AMR. Nous nous bornerons ici à donner quelques indications sur leur utilisation dans ce contexte.

Les filtres passe-bas et passe-haut associés aux AMR splines sont à réponse impulsionnelle infinie et à phase linéaire. Le tableau 1 résume leurs propriétés de symétrie ainsi que celles dont héritent la fonction d'échelle et l'ondelette mère. Les ondelettes obtenues, aussi appelées ondelettes de Battle-Lemarié [11], [46], sont à décroissance exponentielle et possèdent  $N + 1$  moments nuls. Parmi les membres les plus connus de cette famille, se trouvent les ondelettes de Franklin ( $N = 1$ ) et les ondelettes splines cubiques ( $N = 3$ ) qui sont représentées sur les figures 15 et 16.

Tableau 1 – Propriétés de symétrie liées à une décomposition en ondelettes splines orthogonales

	$h_0[\ell]$	$h_1[\ell]$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
$N$ impair	paire	antisymétrique par rapport à 1/2	paire	symétrique par rapport à 1/2
$N$ pair	symétrique par rapport à 1/2	symétrique par rapport à 1	symétrique par rapport à 1/2	antisymétrique par rapport à 1/2

Notons au passage qu'il existe des ondelettes plus régulières que celles que nous venons de décrire, telles que les ondelettes de Meyer qui sont indéfiniment dérivables et à décroissance rapide [55].

### 2.6.4 Ondelettes de Daubechies

Nous avons vu que les filtres de l'AMR en ondelettes splines sont théoriquement de longueur infinie. Pour obtenir des AMR plus simples de mise en œuvre, la mathématicienne Ingrid Daubechies a construit des ondelettes à support borné (ou compact). On peut en effet montrer que la fonction d'échelle et l'ondelette mère d'une AMR sont à support borné si et seulement si les filtres associés sont de longueur finie.

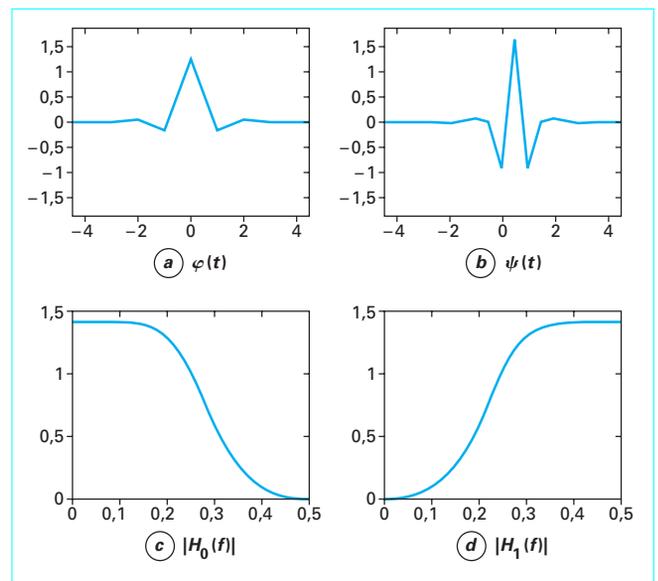


Figure 15 – AMR de Franklin : allures des fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $|H_0(f)|$  et  $|H_1(f)|$

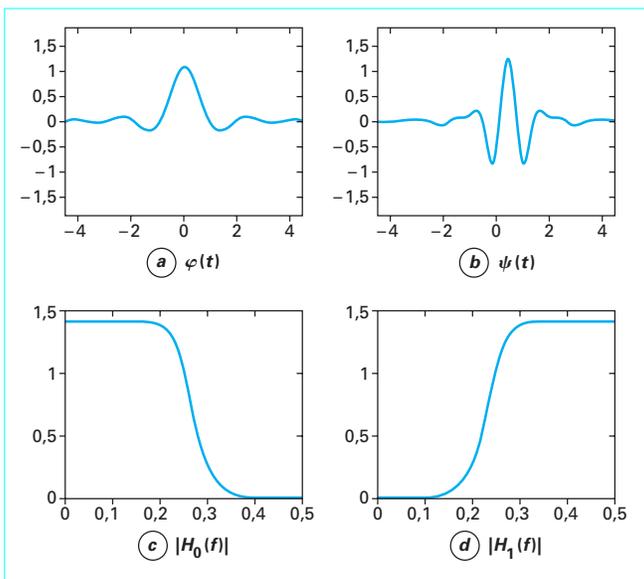


Figure 16 – AMR spline cubique : allures des fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $|H_0(f)|$  et  $|H_1(f)|$

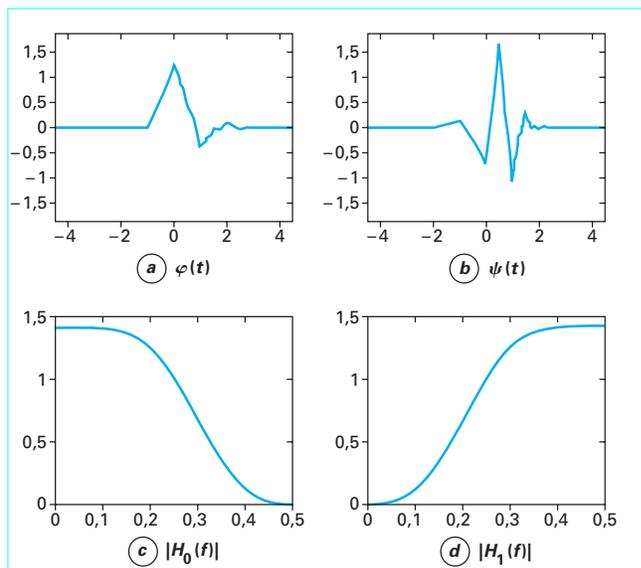


Figure 18 – AMR de Daubechies pour  $N = 3$  : allures des fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $|H_0(f)|$  et  $|H_1(f)|$

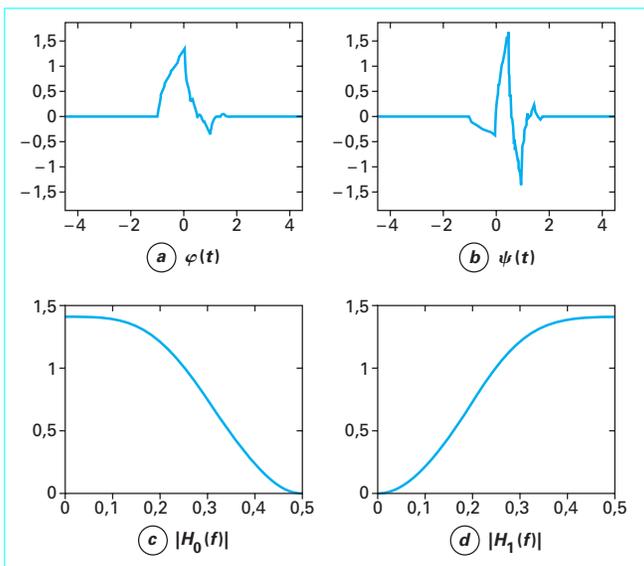


Figure 17 – AMR de Daubechies pour  $N = 2$  : allures des fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $|H_0(f)|$  et  $|H_1(f)|$

Les ondelettes de Daubechies sont de support minimal (c'est-à-dire que les filtres de l'AMR sont les plus courts) pour un nombre donné  $N$  de moments nuls. Leur construction (décrite en détail dans [26], [28]) conduit à des filtres à déphasage minimal, de longueur paire  $2N$  pour des ondelettes ayant un support de largeur  $2N - 1$ . Les figures 17 et 18 fournissent les représentations des fonctions d'échelle et des ondelettes de Daubechies pour  $N = 2$  et  $N = 3$ . On remarque la forte asymétrie de ces ondelettes.

On peut définir d'autres familles d'ondelettes à support compact, possédant des propriétés quelque peu différentes, telles que les *symlets*, d'allure plus symétrique, ou les *coiflets*, pour lesquelles la fonction d'échelle possède un certain nombre de moments nuls.

Il est également possible de concevoir des ondelettes à support compact, dites **ondelettes sur l'intervalle**, adaptées à l'analyse des signaux de durée finie [21]. Pour ce faire, on modifie de façon judicieuse les fonctions de bases localisées sur les extrémités de l'intervalle de temps considéré. On parvient ainsi à éviter les « effets de bords » qui apparaissent dans les décompositions en ondelettes classiques et qui sont souvent ennuyeux d'un point de vue pratique.

## 2.7 Ondelettes biorthogonales, « lifting »

L'asymétrie des ondelettes de Daubechies est due au fait que les filtres employés ne sont pas à phase linéaire. On peut démontrer que les seuls filtres para-unitaires qui soient à phase linéaire et de réponse impulsionnelle finie sont ceux de Haar. Or, pour certaines applications (en traitement d'images notamment) il semble pertinent d'utiliser des ondelettes possédant des propriétés de symétrie.

Pour résoudre ce problème, on est amené à relaxer la condition d'orthogonalité de la base d'ondelettes. On aboutit ainsi à la notion d'**ondelettes biorthogonales** [20]. Les ondelettes employées pour l'analyse sont alors différentes de celles servant à la synthèse. Plus précisément, on considère deux bases d'ondelettes (non orthonormales) de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $\{2^{-j/2} \psi_1(t/2^j - k), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$  et  $\{2^{-j/2} \psi_2(t/2^j - k), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ , vérifiant la propriété de biorthogonalité :

$$\left\langle \frac{1}{2^{j/2}} \psi_1\left(\frac{t}{2^j} - k\right), \frac{1}{2^{j'/2}} \psi_2^*\left(\frac{t}{2^{j'}} - k'\right) \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \text{ et } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un signal  $s(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  se décompose de manière duale sur les éléments de l'une ou l'autre base :

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle s(\tau), \frac{1}{2^{j/2}} \psi_1\left(\frac{\tau}{2^j} - k\right) \right\rangle \frac{1}{2^{j'/2}} \psi_2\left(\frac{t}{2^{j'}} - k'\right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle s(\tau), \frac{1}{2^{j/2}} \psi_2\left(\frac{\tau}{2^j} - k\right) \right\rangle \frac{1}{2^{j'/2}} \psi_1\left(\frac{t}{2^{j'}} - k'\right) \end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients d'une de ces décompositions, on peut, comme dans le cas orthogonal, utiliser l'algorithme de Mallat. Les bancs de filtres d'analyse et de synthèse correspondants sont tou-

jours donnés par les figures 9 et 11 où  $(h_0|\ell|)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  et  $(h_1|\ell|)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  (respectivement  $(\tilde{h}_0|\ell|)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  et  $(\tilde{h}_1|\ell|)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ ) sont les réponses impulsionnelles des filtres passe-bas et passe-haut de synthèse (respectivement d'analyse). La différence avec le cas orthonormal est qu'on n'impose plus les relations :  $\tilde{h}_0|\ell| = h_0^*[-\ell]$  et  $\tilde{h}_1|\ell| = h_1^*[-\ell]$ .

Lorsque l'on combine ces deux bancs de filtres en les cascadant, on doit retrouver le signal en entrée. Cette **condition de reconstruction parfaite** conduit aux contraintes suivantes sur les réponses fréquentielles,  $H_0(f), H_1(f), \tilde{H}_0(f)$  et  $\tilde{H}_1(f)$ , des quatre filtres intervenant :

$$H_0(f) \tilde{H}_0(f) + H_1(f) \tilde{H}_1(f) = 2,$$

$$H_0(f + 1/2) \tilde{H}_0(f) + H_1(f + 1/2) \tilde{H}_1(f) = 0.$$

Les ondelettes biorthogonales 9/7, qui sont très couramment utilisées, sont représentées sur les figures 19 et 20. Les coefficients des filtres correspondants sont fournis dans le tableau 2.

**Tableau 2 – Réponses impulsionnelles des filtres passe-bas d'analyse et de synthèse biorthogonaux 9/7**

$n$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 4$
$\tilde{h}_0 \ell $	0,852699	0,377403	-0,110624	-0,023849	0,037828
$h_0 \ell $	0,788486	0,418092	-0,040689	-0,064539	

On a pour les filtres passe-haut :

$$\tilde{h}_1|\ell| = (-1)^{\ell+1} h_0|\ell+1| \text{ et } h_1|\ell| = (-1)^{\ell-1} \tilde{h}_0|\ell-1|$$

On a de plus en plus tendance à préférer aux structures des figures 9 et 11, celles dites en « lifting » [14], [72] des figures 21 et 22. En effet, la compréhension du fonctionnement de ces structures est plus intuitif. Lors de l'analyse, le « lifting » fait apparaître un premier traitement correspondant à une **prédiction** des échantillons d'indices impairs  $a_{j-1}[2k+1]$  à partir de ceux d'indices pairs  $a_{j-1}[2k]$ . Les coefficients d'ondelettes  $c_j[k]$  peuvent alors être interprétés comme les erreurs de prédiction résultantes. Puis, est réalisée une **mise à jour** des coefficients  $a_{j-1}[2k]$  à partir des coefficients  $c_j[k]$ . Ce second traitement a généralement pour objectif d'obtenir des coef-

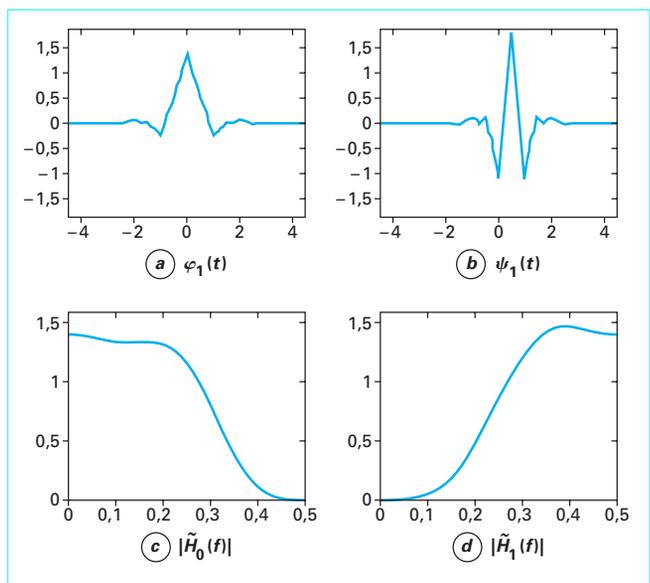


Figure 19 – AMR biorthogonale 9/7 : allures de l'ondelette d'analyse  $\psi_1(t)$ , de la fonction d'échelle associée  $\varphi_1(t)$  et de  $|\tilde{H}_0(f)|$  et  $|\tilde{H}_1(f)|$

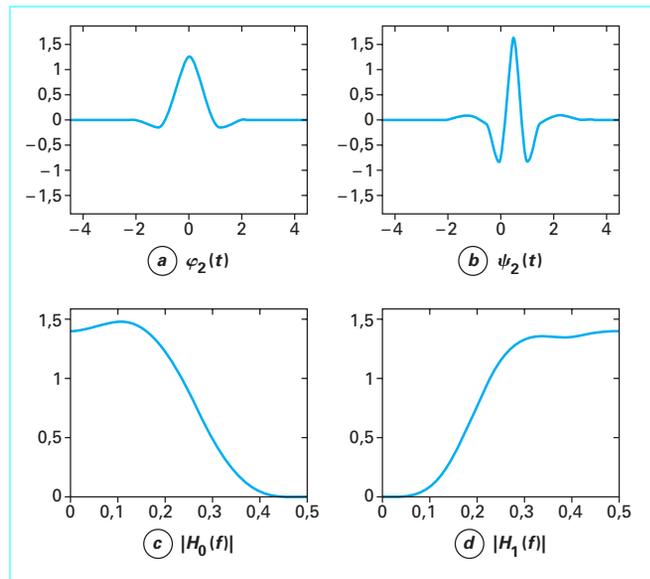


Figure 20 – AMR biorthogonale 9/7 : allures de l'ondelette de synthèse  $\psi_2(t)$ , de la fonction d'échelle associée  $\varphi_2(t)$  et de  $|H_0(f)|$  et  $|H_1(f)|$

icients d'approximation  $a_j[k]$  variant plus lentement que le signal  $a_{j-1}[2k]$ . Comme le montre la figure 22, les filtres de prédiction et de mise à jour (de réponses impulsionnelles respectives  $(p|\ell|)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  et  $(u|\ell|)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ ) ne sont soumis à aucune condition pour que la reconstruction parfaite puisse être effectuée à partir de la structure de synthèse duale. Cette absence de contrainte facilite clairement la conception de ces filtres. Par ailleurs, on peut montrer que toute décomposition biorthogonale associée à des filtres de longueur finie peut être mise en œuvre à l'aide d'un nombre fini de niveaux de « lifting », suivis de multiplications par des constantes non nulles  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ . Une structure d'analyse comportant 2 niveaux de « lifting » est représentée sur la figure 23.

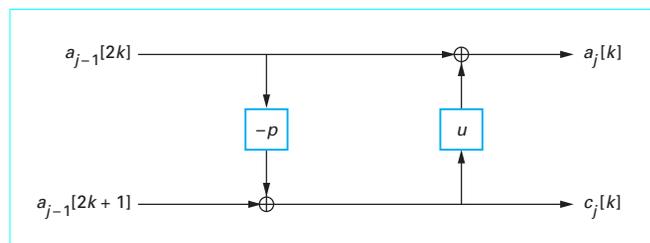


Figure 21 – Structure d'analyse en « lifting »

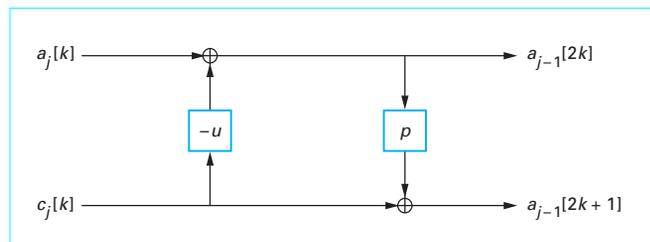


Figure 22 – Structure de synthèse en « lifting »

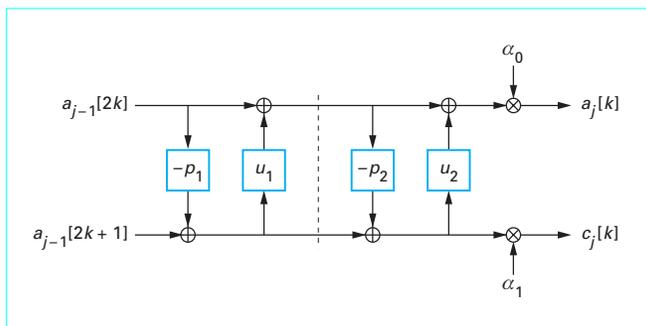


Figure 23 – Structure d'analyse avec 2 niveaux de « lifting »

### 3. Paquets d'ondelettes

Quand les signaux étudiés deviennent plus complexes, il peut être intéressant de chercher à adapter leur représentation à leurs caractéristiques temps-fréquence. Ce fait s'est imposé relativement rapidement aux chercheurs travaillant sur les ondelettes, et notamment sur leurs applications en audio. Signalons dès à présent que cette adaptivité se paie par une augmentation sensible de la complexité des algorithmes employés.

#### 3.1 Bancs de filtres de structures quelconques

Comme le montre la figure 10, les décompositions en ondelettes orthogonales (ou biorthogonales) reposent sur l'emploi itératif de bancs de filtres agissant toujours sur les coefficients d'approximation. Au fur et à mesure que le niveau de résolution  $j$  augmente, l'analyse du signal se focalise sur des bandes de fréquences de plus en plus basses. Des décompositions plus générales peuvent être obtenues en autorisant également la redécomposition des sous-bandes « hautes-fréquences ». De cette manière, on obtient la structure généralisée, dite en sous-bandes égales, de la figure 24.

On remarque que cette décomposition est réalisée à l'aide des mêmes filtres para-unitaires (de réponses impulsionnelles  $h_0$  et  $h_1$ ) que ceux qui, au paragraphe 2.2, nous ont servi à construire la décomposition en ondelettes orthonormales. De plus, on peut montrer que, si  $(c_{0,0}|k|)_{k \in \mathbb{Z}}$  désigne la suite des coefficients d'approximation au niveau de résolution 0 d'un signal  $s(t) \in V_0$ , alors les coefficients issus de chaque branche de la décomposition sont donnés par :

$$c_{j,m}|k| = \left\langle s(t), \frac{1}{2^{j/2}} \omega_m \left( \frac{t}{2^j} - k \right) \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

où les fonctions  $(\omega_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$  sont calculées récursivement à l'aide des équations à 2 échelles suivantes [24], [80] :

$$\omega_{2m}(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_0|\ell| \sqrt{2} \omega_m(2t - \ell)$$

$$\omega_{2m+1}(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_1|\ell| \sqrt{2} \omega_m(2t - \ell)$$

En posant  $m = 0$  et en comparant les relations obtenues avec les relations (9) et (22), on remarque que les fonctions  $\omega_0(t)$  et  $\omega_1(t)$  ne sont autres que la fonction d'échelle  $\varphi(t)$  et l'ondelette mère  $\psi(t)$ .

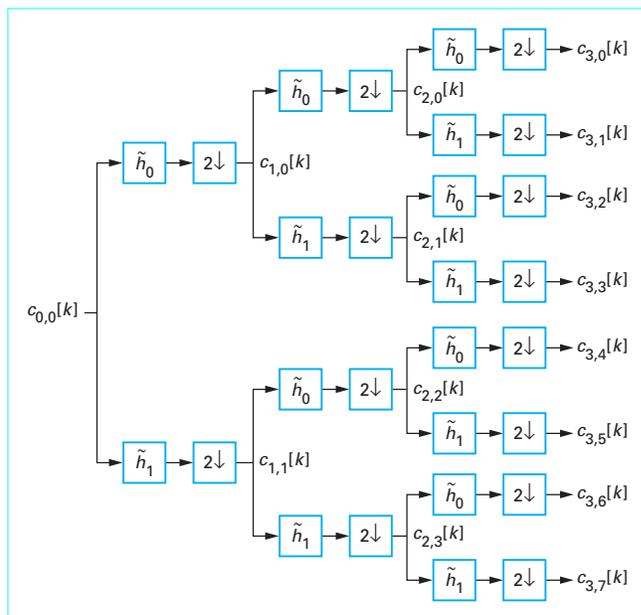


Figure 24 – Analyse en sous-bandes égales sur 3 niveaux de résolution

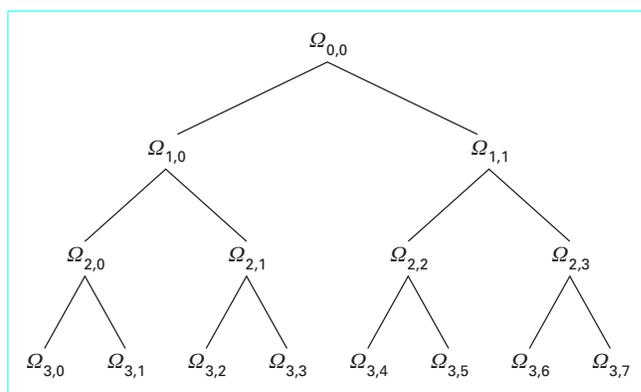


Figure 25 – Arbre associé à l'analyse en sous-bandes égales

Les fonctions  $(\omega_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$  ainsi mises en évidence sont appelées **paquets d'ondelettes**. On peut associer à ces fonctions des sous-espaces vectoriels  $\Omega_{j,m}$  dont les familles  $\mathcal{B}_{j,m} = \{2^{-j/2} \omega_m(t/2^j - k), k \in \mathbb{Z}\}$  sont des bases orthonormales. En particulier, on a  $\Omega_{j,0} = V_j$  et  $\Omega_{j,1} = W_j$ . La condition de para-unitarité des filtres de l'AMR nous assure que, par construction, les sous-espaces vectoriels  $\Omega_{j,2m}$  et  $\Omega_{j,2m+1}$  sont orthogonaux et tels que  $\Omega_{j-1,m} = \Omega_{j,2m} \oplus \Omega_{j,2m+1}$ , ce qui généralise la relation (8). Cette décomposition en sous-espaces vectoriels complémentaires permet d'associer la structure de la figure 24 au schéma de décomposition en arbre binaire de la figure 25.

Notons que, plutôt que de décomposer toutes les sous-bandes, on peut bien ne le faire que pour certaines d'entre elles. La figure 26 fournit un exemple d'un banc de filtres obtenu de cette manière. On a ainsi la possibilité de définir des bancs de filtres de « géométrie » quelconque.

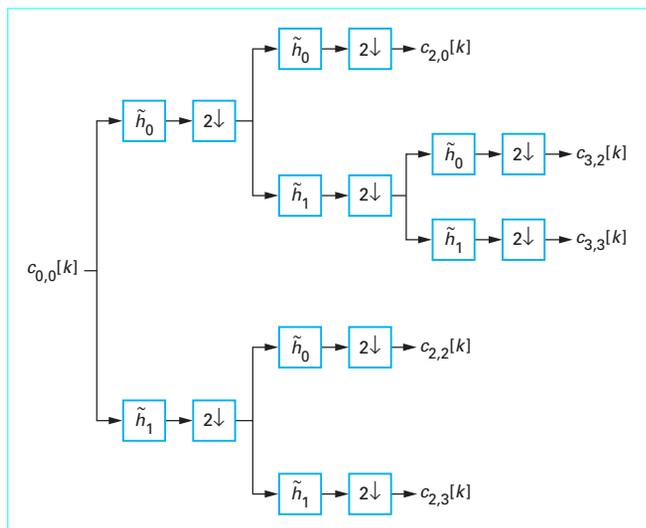


Figure 26 – Exemple de décomposition en paquets d’ondelettes

### 3.2 Arbres de décomposition

La manière récursive dont l’arbre de décomposition a été construit nous permet d’établir le lien entre les indices  $j$  et  $m$  : à chaque niveau de résolution  $j \in \mathbb{N}$  (correspondant à la « profondeur » où l’on se trouve dans l’arbre), l’indice  $m \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$  d’un nœud de l’arbre est égal au nombre de nœuds situés à sa gauche sur le même niveau. Chacun de ces nœuds étant matérialisé par une sous-bande,  $m$  peut-être considéré comme un indice fréquentiel.

Il serait pourtant inexact de dire que, plus  $m$  est grand, plus la sous-bande est de fréquences hautes (problème de l’ordre de Paley [80]).

Un nœud sans descendant constitue une **feuille** de l’arbre. À chaque arbre binaire correspond une base de paquets d’ondelettes, obtenue en agrégeant les bases orthonormales  $\mathcal{B}_{j,m}$  de chaque sous-espace vectoriel  $\Omega_{j,m}$  correspondant à une feuille de l’arbre. Il y a donc autant de bases de paquets d’ondelettes que d’arbres possibles.

Revenons sur l’exemple de la figure 26. Ce banc de filtres correspond à l’arbre binaire de la figure 27. On voit donc que l’espace vec-

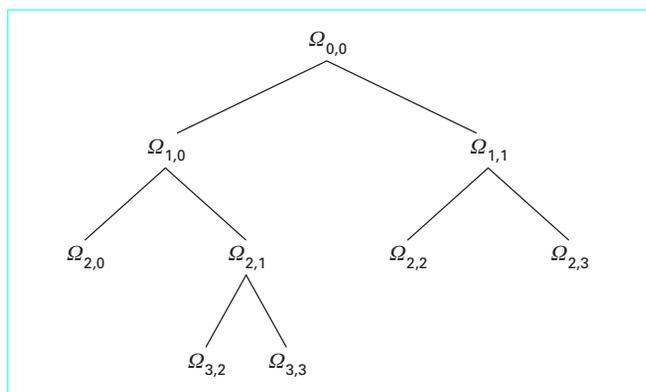


Figure 27 – Arbre associé à la décomposition en paquets d’ondelettes de la figure 26

toriel d’origine  $V_0$  a été partitionné en sous-espaces complémentaires de la façon suivante :

$$V_0 = \Omega_{2,0} \oplus \Omega_{3,2} \oplus \Omega_{3,3} \oplus \Omega_{2,2} \oplus \Omega_{2,3} \cdot$$

### 3.3 Localisation temps-fréquence

Chaque nœud de l’arbre d’indice  $(j, m)$  est associé à une sous-bande dont le support fréquentiel est de largeur approximativement égale à  $2^{-j}$ . La modification de la structure du banc de filtres d’analyse peut donc être vue comme le choix d’une **segmentation fréquentielle** du signal. On conserve néanmoins un pouvoir de localisation temporelle en raison du support compact (ou du caractère rapidement décroissant) des paquets d’ondelettes usuels. Ces décompositions en paquets d’ondelettes conduisent ainsi à des **pavages du plan temps-fréquence** du type de celui de la figure 28. Remarquons que, conformément au principe d’incertitude de Gabor-Heisenberg, mieux un pavé est localisé en fréquence (c’est-à-dire plus il est étroit suivant l’axe des fréquences), plus il est étalé suivant l’axe temporel.

### 3.4 Ondelettes de Malvar

À l’inverse, on peut découper un intervalle de temps  $[0, T[$  en segments dyadiques

$$I_{j,m} = [2^{-j}mT, 2^{-j}(m+1)T[ \text{ où } j \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Une segmentation temporelle dyadique est représentée sur la figure 29 et peut aussi être associée à l’arbre de la figure 30. Par ailleurs, sur chacun des segments, on peut mener une analyse fréquentielle en calculant, par exemple, les coefficients de Fourier de la portion de signal ainsi délimitée.

L’idée que nous venons d’ébaucher peut être perfectionnée en laissant les segments se chevaucher et en les pondérant par des fenêtres assurant des transitions « douces ». De plus, une transformation réelle en cosinus est utilisée plutôt qu’un développement en série de Fourier. On aboutit ainsi à une décomposition ortho-normale en **ondelettes de Malvar** [23]. En terme de localisation temps-fréquence, cette dernière conduit à des pavages du plan temps-fréquence tels que celui de la figure 31.

Signalons l’existence d’analyses (qu’on peut qualifier de bi-arborescentes) qui généralisent les décompositions en paquets d’ondelettes en réalisant conjointement des segmentations temporelle et fréquentielle [41].

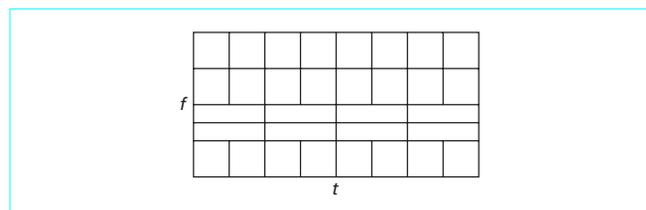


Figure 28 – Pavage du plan  $t$ - $f$  à l’aide de paquets d’ondelettes. Cet exemple correspond à la décomposition de la figure 26

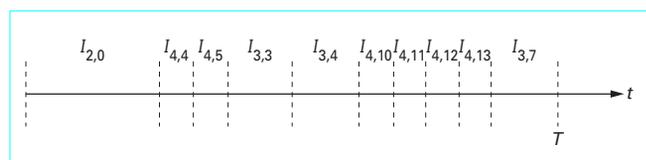


Figure 29 – Exemple de segmentation temporelle dyadique

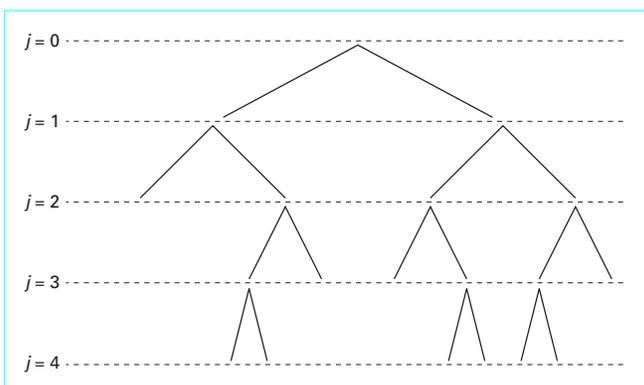


Figure 30 – Arbre associé à la segmentation de la figure 29

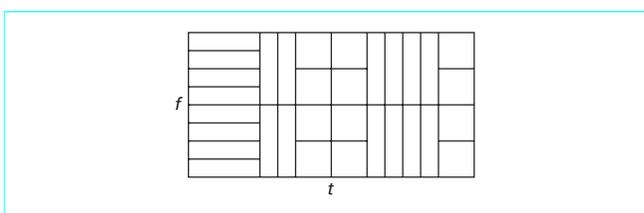


Figure 31 – Pavage du plan t-f à l'aide d'ondelettes de Malvar. Cet exemple correspond à la segmentation de la figure 29

### 3.5 Choix de la meilleure base

Les bases orthonormales présentées jusqu'ici ne dépendent pas du signal traité. Afin d'optimiser la représentation d'un signal donné, on peut choisir la base la mieux adaptée à ce signal parmi un dictionnaire formé de plusieurs bases. Les paquets d'ondelettes et les bases trigonométriques locales (ondelettes de Malvar) sont des exemples de telles bases orthonormales pouvant entrer dans la constitution de dictionnaires. Elles décomposent le signal sur des atomes temps-fréquence et, en sélectionnant la meilleure base, on détermine la décomposition la mieux adaptée à la structure temps-fréquence du signal analysé.

#### 3.5.1 Critères de choix

Pour fixer les idées, supposons que  $E$  soit un sous-espace vectoriel de  $L^2(\mathbb{R})$  de dimension  $K$  et que  $\mathcal{B} = \{e_k(t), k \in \{1, \dots, K\}\}$  et  $\mathcal{B}' = \{e'_k(t), k \in \{1, \dots, K\}\}$  soient deux bases orthonormales de  $E$ .

Considérons maintenant un signal  $s(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$ . Son approximation sur le sous-espace vectoriel  $E$  s'écrit dans les deux bases orthonormales :

$$\begin{aligned} \text{proj}_E s(t) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} s[\ell] e_{\ell}(t), & |s[1]| &\geq \dots \geq |s[K]| \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} s'[\ell] e'_{\ell}(t), & |s'[1]| &\geq \dots \geq |s'[K]| \end{aligned}$$

où  $s[\ell] = \langle s(t), e_{\ell}(t) \rangle$  et  $s'[\ell] = \langle s(t), e'_{\ell}(t) \rangle$ , les éléments des deux bases ayant été réindexés dans l'ordre décroissant de leur importance vis-à-vis de la représentation du signal  $s(t)$ . Quand on

utilise un nombre  $k \in \{1, \dots, K\}$  de fonctions de base, l'erreur quadratique d'approximation est donnée, dans chacun des deux cas, par :

$$\begin{aligned} \varepsilon[k] &= \|s\|^2 - \sum_{\ell=1}^k |s[\ell]|^2 \\ \varepsilon'[k] &= \|s\|^2 - \sum_{\ell=1}^k |s'[\ell]|^2 \end{aligned}$$

Il est clair que la base  $\mathcal{B}$  se révèle meilleure que la base  $\mathcal{B}'$  si,

$$\text{pour tout } k \in \{1, \dots, K\}, \varepsilon[k] \leq \varepsilon'[k]$$

ou, de manière équivalente, si :

$$\forall k \in \{1, \dots, K\}, \sum_{\ell=1}^k |s[\ell]|^2 \geq \sum_{\ell=1}^k |s'[\ell]|^2 \quad (28)$$

La relation précédente exprime une propriété de concentration de l'énergie du signal sur un nombre  $k$  de composantes, ce qui est avantageux pour obtenir une représentation parcimonieuse de ce signal. Par ailleurs, on peut montrer que si la relation (28) est vérifiée, alors pour toute fonction réelle concave  $J$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ , on a :

$$Q(s, \mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{\infty} J(|s[k]|^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} J(|s'[k]|^2) = Q(s, \mathcal{B}')$$

Par extension de ce résultat, on peut considérer que  $\mathcal{B}$  est meilleure base que  $\mathcal{B}'$  pour le signal  $s(t)$ , au sens de la fonction concave  $J$ , si l'inégalité ci-dessus est vérifiée. Dans ce contexte,  $Q$  est appelée fonction de coût. La fonction de coût la plus courante est l'entropie définie par  $J(u) = -u \ln(u)$ . Dans ce cas, le coût est :

$$Q(s, \mathcal{B}) = - \sum_{k=1}^{\infty} |s[k]|^2 \ln(|s[k]|^2)$$

#### 3.5.2 Algorithme de sélection

Le problème pratique qui se pose maintenant est celui de la recherche rapide de la meilleure base au sein d'un dictionnaire, pour un signal donné. Sachant que pour un signal comportant  $K$  échantillons, le dictionnaire peut comprendre plus de  $2^{K/2}$  bases, la comparaison directe des différentes bases conduirait à plus de  $K^2$  opérations, ce qui représente une charge de calcul prohibitive. L'algorithme de Wickerhauser [24] que nous allons décrire permet de se ramener à une complexité de l'ordre de  $K \log_2(K)$  opérations.

Considérons un dictionnaire de bases orthonormales

$$\mathcal{B}_{j, m}, \quad 0 \leq m \leq 2^j - 1, \quad 0 \leq j \leq j_{\max}$$

structurées suivant un arbre binaire. Le nombre  $j_{\max}$  correspond ici au nombre maximal de niveaux de résolution permis. Conformément au paragraphe précédent, on se donne une certaine fonction de coût « additive »  $Q$ . Nous allons, par ailleurs, noter  $\mathcal{B}_{j, m}$  la meilleure base « trouvée » par l'algorithme au nœud  $(j, m)$ .

L'algorithme de Wickerhauser choisit progressivement la meilleure base, en commençant par les feuilles de l'arbre se trouvant au niveau  $j_{\max}$ , et en remontant jusqu'au nœud  $(0, 0)$ . Pour chaque feuille (indexée par  $(j_{\max}, m)$ ), on se contente de la seule base disponible,  $\mathcal{B}_{j_{\max}, m}$ . La première étape de l'algorithme consiste donc à fixer :

$$\forall m \in \{0, \dots, 2^{j_{\max}} - 1\}, \quad \mathcal{B}_{j_{\max}, m}^* = \mathcal{B}_{j_{\max}, m}$$

Ensuite, aux niveaux supérieurs de la décomposition (pour  $j$  variant dans  $\{0, \dots, j_{\max} - 1\}$ ), on exploite le critère de concentration d'énergie pour décider quelle est la meilleure base d'un sous-espace  $\Omega_{j, m}$ .

Pour cela, on compare le coût de la décomposition sur la base  $\mathcal{B}_{j,m}^*$  à celui correspondant aux meilleures bases qui, lors des itérations précédentes de l'algorithme, ont été choisies, pour les nœuds  $(j+1, 2m)$  et  $(j+1, 2m+1)$ . En d'autres termes, si :

$$Q(s, \mathcal{B}_{j,m}^*) \leq Q(s, \mathcal{B}_{j+1,2m}^* \cup \mathcal{B}_{j+1,2m+1}^*)$$

alors la meilleure base au nœud  $(j, m)$  est  $\mathcal{B}_{j,m}^* = \mathcal{B}_{j,m}$ . Sinon, le nœud reste décomposé et on effectue la concaténation des meilleures bases de ses « descendants » :

$$\mathcal{B}_{j,m}^* = \mathcal{B}_{j,2m}^* \cup \mathcal{B}_{j,2m+1}^*$$

En itérant le procédé, on arrive à la racine de l'arbre (nœud  $(0, 0)$ ) et, au final, la meilleure base est  $\mathcal{B}_{0,0}$ .

## 4. Trames d'ondelettes

La transformée continue en ondelettes (4), de même que la transformée de Fourier à court terme (2), sont des représentations qui ne sont pas « économiques », en ce sens que, partant d'un signal monodimensionnel, on arrive à une fonction de deux variables réelles. On dit que **ces représentations sont très redondantes**. De plus, l'implantation sur ordinateur des algorithmes d'analyse et de synthèse à l'aide de ces transformations nécessite, à un moment donné, l'échantillonnage du signal. Cela constitue un argument pour travailler dès le début avec des décompositions discrètes. À l'autre extrême, se situent les décompositions sur des bases d'ondelettes qui sont non redondantes, mais qui présentent des inconvénients dans un certain nombre d'applications. Par exemple, en reconnaissance de formes, il est important que la représentation d'un objet ne varie pas en fonction de sa position. En traduisant le signal, on souhaiterait donc que les coefficients d'ondelettes ne subissent qu'un effet de translation. Cette propriété d'**invariance par translation** n'est malheureusement pas vérifiée pour les décompositions sur des bases d'ondelettes.

Un compromis entre ces deux analyses est obtenu à l'aide de décompositions discrètes redondantes sur des trames d'ondelettes (*frames* en anglais). Ces trames sont des familles de fonctions

$$\{\psi_{j,k}(t), (j, k) \in I\}$$

où  $I$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ . Le signal s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la trame, mais on n'impose plus la condition que ces fonctions forment une base. La seule condition requise est l'existence de deux constantes réelles strictement positives,  $A$  et  $B$ , appelées **bornes de la trame**, telles que, pour toute fonction  $s(t)$ , on ait :

$$A\|s\|^2 \leq \sum_{(j,k) \in I} |\langle s(t), \psi_{j,k}(t) \rangle|^2 \leq B\|s\|^2$$

Cette condition assure la possibilité de reconstruire le signal à partir de ses coefficients de décomposition :  $c_{j,k} = \langle s(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ .

Sous certaines conditions sur la fonction  $\psi(t)$  et sur les réels  $\gamma > 1$  et  $b_0 > 0$  [27], [28], on peut montrer que les fonctions :

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\gamma^j} \psi\left(\frac{t - kb_0 \gamma^j}{\gamma^j}\right), \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2$$

forment une trame de  $L^2(\mathbb{R})$ . L'expression précédente correspond à une discrétisation des paramètres d'échelle et de localisation intervenant dans la relation (4). L'un des avantages de ces trames est de permettre un échantillonnage temporel plus fin (de pas  $b_0 \gamma^j$ ) que l'échantillonnage dyadique (de pas  $2^j$ ) typique des décompositions sur des bases d'ondelettes. Un autre aspect intéressant est la possibilité de choisir de manière plus souple la forme de l'ondelette mère  $\psi(t)$  lorsque sont relâchées les contraintes d'orthogonalité ou de biorthogonalité.

Pour s'affranchir des problèmes de non-invariance par translation posés par les bases d'ondelettes, on est amené à considérer des familles de fonctions :

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{t-k}{2^j}\right), \quad 0 < j \leq j_{\max}, k \in \mathbb{Z}$$

Sous certaines hypothèses, on parvient, à partir de ces fonctions, à générer des trames de l'espace  $V_0$  d'une AMR [57], [22], [60]. L'**algorithme à trous** [68] offre une solution efficace pour mettre en œuvre les décompositions associées. Cet algorithme, que nous ne détaillerons pas, présente un fort lien de parenté avec l'algorithme de Mallat.

## 5. Bases d'ondelettes multidimensionnelles

Les AMR multidimensionnelles, et notamment bidimensionnelles, sont importantes dans des domaines comme le traitement d'images, la vision par ordinateur, ou l'étude de la turbulence. Dans ces applications, les données brutes sont parfois de volume trop important pour être traitées en temps réel par des algorithmes sophistiqués. Dans la mesure du possible, il faut donc chercher à extraire les informations ou détails essentiels présents dans ces données. Les ondelettes multidimensionnelles peuvent servir à l'extraction de ces caractéristiques. Dans la suite, nous illustrerons notre propos dans le cas 2D.

### 5.1 Analyses multirésolution séparables

L'extension multidimensionnelle la plus simple et la plus couramment utilisée de L'AMR 1D est obtenue en considérant des **produits tensoriels d'espaces vectoriels** [48]. Sans entrer dans les détails, disons qu'il s'agit de partir d'outils monodimensionnels et de les faire agir successivement suivant chaque dimension de l'espace.

On montre ainsi que, si  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$ , on peut en déduire une AMR séparable de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  que nous noterons  $(V_j^2)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Si  $\varphi(t)$  est la fonction d'échelle associée à l'AMR  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , alors une base orthonormale de  $V_j^2$  est donnée par :

$$\left\{ \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{x}{2^j} - n\right) \varphi\left(\frac{y}{2^j} - m\right), (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \quad (29)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on cherche une base d'ondelettes dans l'espace vectoriel qui est le complémentaire orthogonal de  $V_j^2$  dans  $V_{j-1}^2$ . En fait, en 2D, on exhibe non plus un, mais trois espaces vectoriels de détails  $W_j^H$ ,  $W_j^V$  et  $W_j^D$  de telle sorte que :

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^H \oplus W_j^V \oplus W_j^D.$$

Si  $\psi(t)$  désigne l'ondelette mère associée à l'AMR  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , posons :

$$\begin{aligned} \psi_H(x, y) &= \varphi(x) \psi(y) \\ \psi_V(x, y) &= \psi(x) \varphi(y) \\ \psi_D(x, y) &= \psi(x) \psi(y) \end{aligned}$$

On obtient des bases orthonormales de ces trois sous-espaces vectoriels de détails par translations et dilatations/contractions de ces fonctions :

$$\left\{ \frac{1}{2^j} \psi_H \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right), (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \text{ base orthonormale de } W_j^H$$

$$\left\{ \frac{1}{2^j} \psi_V \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right), (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \text{ base orthonormale de } W_j^V$$

$$\left\{ \frac{1}{2^j} \psi_D \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right), (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \text{ base orthonormale de } W_j^D$$

Les trois types d'ondelettes ainsi construites extraient les détails d'une image à différentes échelles et orientations. Les transformées de Fourier de  $\varphi(t)$  et  $\psi(t)$  étant respectivement de type « passe-bas » et « passe-bande », il en découle des propriétés de sélectivité fréquentielle pour les ondelettes bidimensionnelles. Les ondelettes  $\psi_H(x, y)$  vont ainsi servir à mettre en évidence les détails de l'image de basses fréquences horizontales (suivant  $x$ ) et « hautes » fréquences verticales, ce qui correspond à des **contours horizontaux**. Les détails de hautes fréquences horizontales et basses fréquences verticales (**contours verticaux**) vont être extraits à l'aide de la fonction  $\psi_V(x, y)$ . Quand à l'ondelette  $\psi_D(x, y)$ , elle permet de récupérer les composantes résiduelles qui sont de hautes fréquences suivant les deux dimensions de l'espace, ce que l'on appelle des **détails diagonaux**.

La projection d'une image  $s(x, y)$  sur le sous-espace  $V_j^2$  s'interprète comme une approximation de cette image à la résolution  $2^{-j}$ . Elle est donnée par la formule :

$$\text{proj}_{V_j^2} s(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_j[n, m] \frac{1}{2^j} \varphi \left( \frac{x}{2^j} - n \right) \varphi \left( \frac{y}{2^j} - m \right) \quad (30)$$

avec  $a_j[n, m] = \langle\langle s(x, y), \frac{1}{2^j} \varphi \left( \frac{x}{2^j} - n \right) \varphi \left( \frac{y}{2^j} - m \right) \rangle\rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) \cdot \frac{1}{2^j} \varphi^* \left( \frac{x}{2^j} - n \right) \varphi^* \left( \frac{y}{2^j} - m \right) dx dy$$

où  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  représente le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Comme dans le cas 1D, on dispose d'une équation récursive pour calculer des approximations de résolutions décroissantes, en exploitant les filtres de l'AMR :

$$a_j[n, m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_0^*[k-2n] h_0^*[\ell-2m] a_{j-1}[k, \ell] \quad (31)$$

Le passage entre deux approximations successives se fait donc par filtrage passe-bas 2D de réponse impulsionnelle

$$(h_0^*[\cdot-k] h_0^*[\cdot-\ell])_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2}$$

suivie d'une décimation d'un facteur 2 suivant les lignes et les colonnes de l'image. Ces traitements peuvent être séparés en une partie qui s'effectue d'abord sur les lignes et ensuite une autre qui porte sur les colonnes. On aboutit ainsi au schéma de la figure 32 où  $(2, 1)\downarrow$  désigne la décimation d'un facteur 2 suivant les lignes, alors que les colonnes restent inchangées et  $(1, 2)\downarrow$  est l'opérateur de décimation d'un facteur 2 suivant les colonnes.

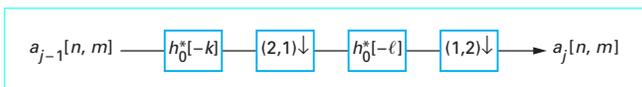


Figure 32 – Calcul récursif des coefficients d'approximation dans une AMR 2D séparable

De manière analogue, on obtient les projections sur les sous-espaces  $W_j^H, W_j^V$  et  $W_j^D$  :

$$\text{proj}_{W_j^H} s(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_j^H[n, m] \frac{1}{2^j} \psi_H \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right)$$

$$\text{proj}_{W_j^V} s(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_j^V[n, m] \frac{1}{2^j} \psi_V \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right)$$

$$\text{proj}_{W_j^D} s(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_j^D[n, m] \frac{1}{2^j} \psi_D \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right)$$

et les coefficients de détails verticaux, horizontaux et diagonaux sont donnés par :

$$c_j^H[n, m] = \langle\langle s(x, y), \frac{1}{2^j} \psi_H \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right) \rangle\rangle$$

$$c_j^V[n, m] = \langle\langle s(x, y), \frac{1}{2^j} \psi_V \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right) \rangle\rangle$$

$$c_j^D[n, m] = \langle\langle s(x, y), \frac{1}{2^j} \psi_D \left( \frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m \right) \rangle\rangle$$

On en déduit le schéma de décomposition de la figure 33 qui répartit le traitement bidimensionnel sur deux étages de bancs de filtres monodimensionnels. D'un point de vue fréquentiel, cette analyse en sous-bandes découpe approximativement le spectre des coefficients  $a_{j-1}[n, m]$  comme le montre la figure 34. Si l'on schématise de façon simplifiée le banc de filtres d'analyse 2D par un bloc à 1 entrée et 4 sorties, l'AMR 2D peut être implantée en cascade de ces bancs de filtres, tel que l'indique la figure 35. Cela correspond à un raffinement de l'analyse fréquentielle dans les basses fréquences (cf. figure 36).

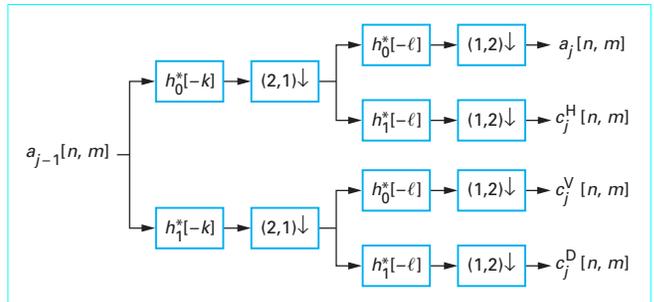
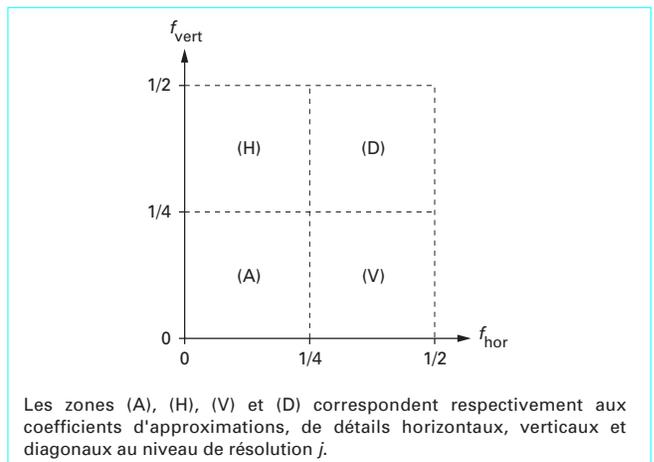


Figure 33 – Banc de filtres d'analyse 2D séparables



Les zones (A), (H), (V) et (D) correspondent respectivement aux coefficients d'approximations, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux au niveau de résolution  $j$ .

Figure 34 – Découpage approximatif du spectre 2D du champ  $a_{j-1}[n, m]$  réalisé par un banc de filtres séparables

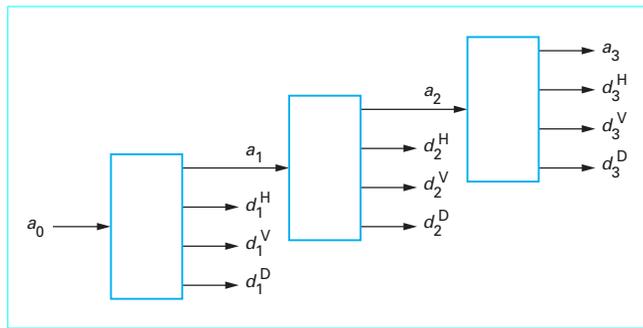
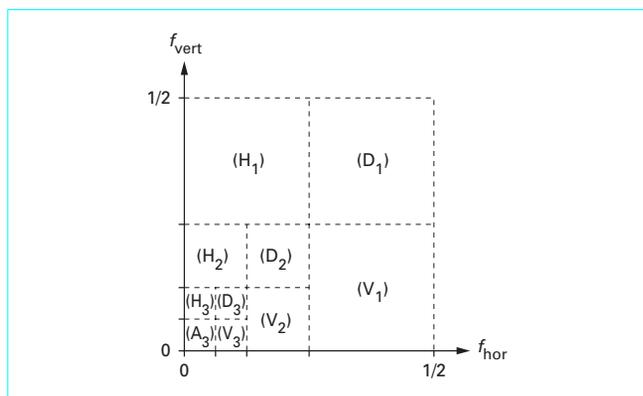


Figure 35 – Mise en œuvre d’une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution

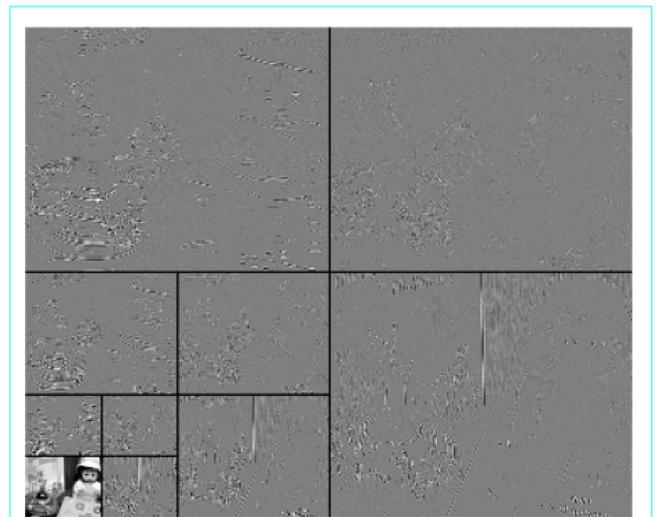


Les zones  $(A_j)$ ,  $(M_j)$ ,  $(V_j)$  et  $(D_j)$  avec  $j \in \{1,2,3\}$  correspondent respectivement aux coefficients d’approximations, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux au niveau de résolution  $j$ .

Figure 36 – Découpage approximatif du spectre 2D du champ  $a_0[n, m]$  réalisé lors d’une AMR 2D séparable



Figure 37 – Image originale



La décomposition a été menée sur 3 niveaux de résolution en employant des filtres biorthogonaux 9/7. La valeur maximale positive de chaque sous-bande est représentée en blanc tandis que le noir correspond à la valeur minimale négative.

Figure 38 – Coefficients d’ondelettes et d’approximation de l’image de la figure 37 disposés comme sur la figure 36 (mais ici dans le domaine spatial)

La reconstruction se fait en cascadant de façon séparable des bancs de filtres de synthèse monodimensionnels.

Suivant les mêmes principes que ceux que nous avons exposés, on conçoit sans difficulté des bases biorthogonales d’ondelettes séparables multidimensionnelles. Ces décompositions biorthogonales sont très populaires en traitement d’images [5]. Les figures 37 et 38 montrent le résultat d’une décomposition en ondelettes biorthogonales 2D.

## 5.2 Ondelettes en quinconce

Comme nous l’avons vu, les ondelettes séparables 2D possèdent des propriétés de directionnalité. Par ailleurs, elles sont localisées spatialement autour de chaque point d’un réseau rectangulaire (cf. figure 39). Or, dans certaines applications (certains systèmes d’imagerie satellite, par exemple), les données sont plutôt échantillonnées suivant un réseau quinconce (cf. figure 40).



Figure 39 – Échantillonnage rectangulaire

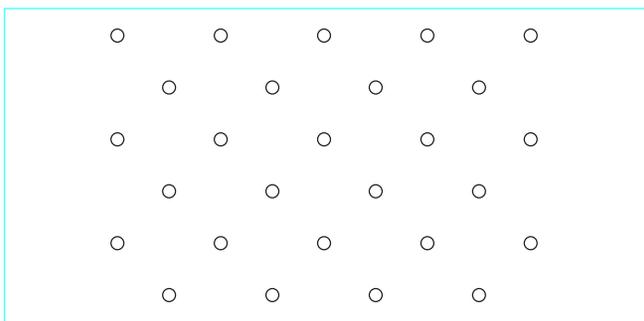


Figure 40 – Échantillonnage en quinconce

Il est possible de concevoir des bases orthonormales (ou biorthogonales) d'ondelettes localisées suivant un tel réseau et qui, de plus, sont presque de forme isotrope. Ces ondelettes sont associées à des AMR en quinconce de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  où l'on passe d'un niveau de résolution au suivant en multipliant par  $\sqrt{2}$  le facteur d'échelle [34]. Les bancs de filtres correspondants ne comportent que deux canaux, à l'instar de ceux introduits au paragraphe 2.4. Les différences avec le cas 1D sont les suivantes :

- les filtres d'analyse ou de synthèse sont bidimensionnels ;
- l'opération de décimation d'un facteur 2 doit être remplacée par une décimation d'un facteur  $\sqrt{2}$  qui, à champ  $\tilde{c}_j[n, m]$ , associe  $c_j[n, m] = \tilde{c}_j[n + m, n - m]$  ;
- de façon duale, une interpolation d'un facteur  $\sqrt{2}$  doit être employée lors de la synthèse.

## 6. Quelques applications

### 6.1 Compression d'images

Le domaine d'applications dans lequel les ondelettes ont sans doute eu l'impact le plus important est la compression d'images [6]. Cela est dû en grande partie aux excellentes performances en compression qui sont obtenues par les algorithmes à base d'ondelettes. Une autre raison de ce succès est l'introduction de fonctionnalités de scalabilité en résolution et en qualité qui seront évoquées par la suite.

L'amélioration de l'efficacité de codage par rapport aux schémas de type MICD (Modulation d'Impulsions Codées Différentiellement) ou aux techniques basées sur la TCD (Transformée en Cosinus Discrète) s'explique par une meilleure concentration de l'énergie réalisée par les décompositions en ondelettes et l'absence d'« effets de blocs ». Un autre facteur de gain est le développement d'algorithmes de compression capables de prendre en compte de manière efficace les dépendances hiérarchiques entre les coefficients d'ondelettes dans les différentes sous-bandes. Nous allons maintenant détailler quelques points essentiels d'un algorithme de compression à base d'ondelettes comme le choix des filtres, ou l'utilisation d'« arbres de zéros » dans la stratégie de codage des coefficients. Nous n'explicitons pas le fonctionnement des modules de quantification ou de codage entropique [56], [32] qui jouent un rôle tout aussi important mais qui ne sont pas spécifiques à un codeur à base d'ondelettes.

#### 6.1.1 Choix des filtres

La plupart des systèmes de compression d'images à l'aide d'ondelettes exploitent des décompositions 2D séparables. Le choix

des bancs de filtres influe fortement sur les performances du système [79]. Les décompositions orthonormales assurent une erreur de reconstruction égale à l'erreur de quantification des coefficients et sont, pour cette raison, simples à utiliser mais elles ne conduisent pourtant pas aux meilleurs résultats. D'autres caractéristiques, comme la longueur des filtres employés [33] ou la régularité peuvent se révéler plus importantes.

Des décompositions biorthogonales sont souvent préférées car elles permettent d'employer des filtres à phase linéaire, bien localisés spatialement. Plus précisément, des bancs d'analyse avec des filtres passe-bas longs et passe-haut courts sont généralement adoptés [10] car ils s'adaptent bien aux caractéristiques des images naturelles : l'information basse-fréquence provient des régions homogènes ayant un support spatial étendu, tandis que l'information haute-fréquence est liée aux contours, qui sont de supports limités. La longueur des filtres peut aussi être réduite au fur et à mesure que le niveau de décomposition augmente. Cela permet d'atténuer les effets d'oscillation (*ringing*) dus à la quantification des coefficients au voisinage des contours. Pour les premiers niveaux de décomposition, l'utilisation de filtres assez longs évite la création d'« effets de blocs ».

Par ailleurs, l'utilisation de filtres dont les réponses impulsionnelles présentent des propriétés de symétrie est intéressante pour le traitement des bords de l'image. On parvient ainsi à éviter la création d'« effets de bord » en étendant l'image, au-delà de ses frontières, par symétrisation « miroir ». Parmi les paires de filtres bi-orthogonaux les plus fréquemment utilisés, citons les 9/7, 5/3, 9/3 et 18/10. Il est difficile de dire quel est le « meilleur » banc de filtres, car différents critères d'optimisation peuvent être employés. Par ailleurs, une décomposition peut s'avérer adaptée à une classe d'images et être sous-optimale pour d'autres types d'images.

Signalons enfin que deux types de compression peuvent être distingués :

- les techniques **sans perte** permettent, après compression puis reconstruction, de retrouver parfaitement l'image d'origine. Les codeurs sans perte à base d'ondelettes nécessitent des adaptations des bancs de filtres usuels de façon à préserver le caractère entier des données [16]. L'inconvénient de ces méthodes est d'être limitées à des taux de compression modestes ;
- les techniques **avec pertes** autorisent certaines altérations de l'image de façon à pouvoir la compresser plus fortement. La distorsion introduite par la compression doit cependant être aussi faible que possible.

Dans la suite, nous allons porter notre attention sur ces dernières méthodes.

#### 6.1.2 Stratégies de codage

Une première stratégie pour coder les coefficients d'ondelettes consiste à employer des algorithmes qui ne prennent pas explicitement en compte les spécificités de l'AMR réalisée. Ces algorithmes suivent la démarche classique pour un codage par transformée, à savoir : une allocation de bits entre les différentes sous-bandes, une quantification des coefficients dans chaque sous-bande et, enfin, un codage entropique. Pour chaque sous-bande, le quantificateur peut être conçu de manière optimale si l'on connaît la loi de probabilité des coefficients auxquels il s'applique (quantificateur de Lloyd-Max [56]). Le codeur entropique peut être un simple codeur de Huffman, ou il peut adapter le calcul des probabilités de chaque code en fonction des valeurs des coefficients voisins de celui qu'on est en train de coder (codage contextuel). De cette manière, on exploite les corrélations résiduelles intrabandes. Une quantification vectorielle des coefficients peut conduire à une amélioration de l'efficacité de codage, au prix d'une charge de calcul plus lourde [5].

Une autre stratégie souvent plus profitable consiste à exploiter les dépendances hiérarchiques entre les coefficients d'ondelettes. La méthode la plus connue de ce type est l'EZW (*Embedded Zerotrees*

of Wavelet coefficients) [67]. Elle est basée sur une décomposition en ondelettes, mais son principe reste valable pour d'autres décompositions en sous-bandes. Les principaux ingrédients de cet algorithme sont :

- une prédiction de l'information non significative d'une échelle à l'autre, en exploitant l'autosimilarité (cf. paragraphe 6.3) souvent présente dans les images naturelles ;
- une quantification par approximations successives ;
- un codage sans perte, réalisé à l'aide d'un codeur arithmétique adaptatif [81].

Précisons d'abord un point de vocabulaire. Un coefficient situé dans une sous-bande de résolution  $j$  et indexé spatialement par  $(m, n)$  est appelé **parent** des coefficients situés dans les sous-bandes de plus haute résolution  $j' < j$  et qui correspondent à la même orientation (horizontale, verticale ou diagonale) et à la même position spatiale dans l'image originale (cela correspond à des coefficients d'ondelettes d'indices  $(2^{j-j'}m + k, 2^{j-j'}n + \ell)$  avec  $(k, \ell) \in \{0, \dots, 2^{j-j'} - 1\}^2$ ). Ces derniers sont ses **descendants**. Un coefficient situé dans une des sous-bandes de plus basse résolution  $j_{\max}$ , et tous ses descendants, forment un **arbre** (voir figure 41). Tous les coefficients de la décomposition sont ainsi regroupés en arbres spatiaux.

La première caractéristique que nous avons mentionnée pour l'algorithme EZW part de l'hypothèse que, si un coefficient d'ondelettes d'une sous-bande de basse résolution est inférieur à un seuil donné, alors tous les autres coefficients, correspondant à la même position dans l'image et se trouvant dans les sous-bandes de plus haute résolution ayant la même orientation, ont une forte probabilité d'être aussi inférieurs à ce seuil. Par conséquent, en examinant la valeur d'un seul coefficient à basse résolution, on peut prédire l'absence d'information significative dans toute une ramification de l'arbre (d'où le nom de l'algorithme).

L'EZW procède de manière itérative. À l'initialisation, un ordre de parcours des sous-bandes est fixé (voir figure 42), ainsi que le seuil initial, en général égal à la moitié du plus grand coefficient  $q_{\max}$ . À la  $j^{\text{ième}}$  itération, deux « passes » sont exécutées :

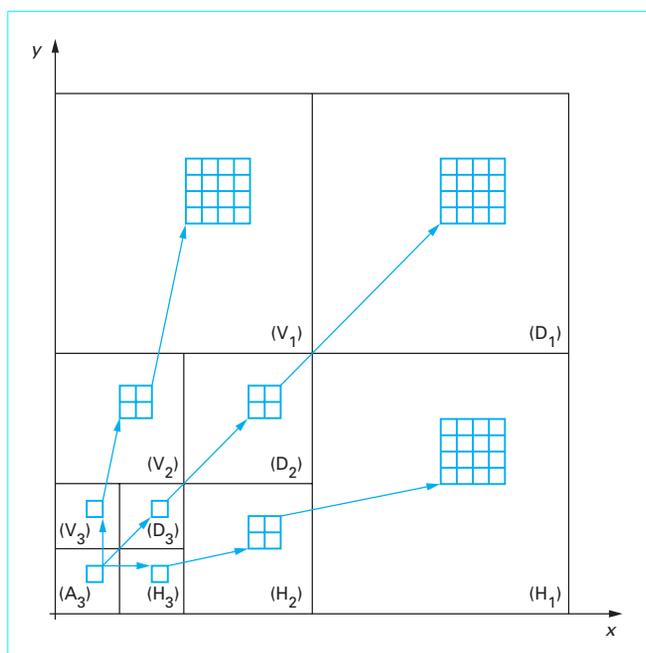


Figure 41 – Regroupement en arbres des coefficients d'ondelettes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)

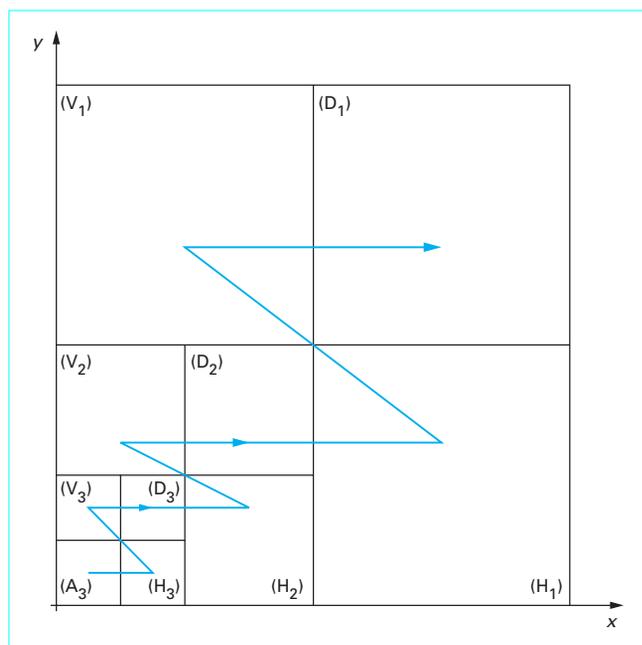


Figure 42 – Ordre de balayage des sous-bandes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)

1. Une première passe, dite **dominante**, dans laquelle l'information de signifiante est codée. Un coefficient est jugé significatif si sa valeur absolue est supérieure au seuil. Quatre codes sont utilisés :

- P, si le coefficient est significatif et positif ;
- N, si le coefficient est significatif et négatif ;
- AZ (arbre de zéros), si le coefficient n'est pas significatif et si tous ses descendants sont également non significatifs ;
- ZI (zéro isolé), si le coefficient n'est pas significatif, mais s'il a des descendants significatifs.

À la fin de ce traitement, le seuil est divisé par 2, en vue de la prochaine itération.

2. Une passe de **raffinement**, au cours de laquelle on quantifie les coefficients significatifs sur l'intervalle  $[q_{\max}/2^i, q_{\max}]$  avec un pas de quantification  $q_{\max}/2^{i+1}$ .

Si l'on considère une représentation binaire des coefficients, cette deuxième passe peut être vue comme un raffinement successif, bit par bit, des coefficients codés (donc considérés significatifs) dans les étapes précédentes de l'algorithme.

L'algorithme EZW, ainsi que ses nombreuses variantes et améliorations ([65], [54]...), a l'avantage de fournir dans le flux de bits qui est généré une représentation progressive de l'image, allant des informations les plus significatives vers les moins importantes. On a ainsi la possibilité d'arrêter le codage ou le décodage à tout moment, ce qui est essentiel dans de nombreuses applications où il existe des limitations de débit ou de puissance de calcul. La capacité d'un codeur (ou décodeur) à « couper » à un certain débit le flux codé, en obtenant par décodage la « meilleure » qualité compatible avec ce débit, est appelée **scalabilité en qualité** (ou en SNR). Cette propriété est fondamentale pour les codeurs d'images ou vidéo dans les standards actuels et futurs. En effet, on assiste à une généralisation de la transmission d'information visuelle sur des réseaux hétérogènes, avec des conditions de transport (débit, taux d'erreurs...) variables, alors que les utilisateurs ont également des capacités de décodage différentes.

Pour les mêmes raisons, certaines applications peuvent avoir besoin de décoder l'image ou la vidéo à une résolution spatiale inférieure. Dans ce cas, le flux doit être organisé de telle manière qu'il puisse être « coupé » à la résolution souhaitée. Cette capacité définit un codeur **scalable (ou échelonnable) en résolution**. Avec une décomposition en ondelettes, il est très facile de hiérarchiser le flux en transmettant les sous-bandes par niveau de résolution, en allant de la plus basse vers la plus haute résolution.

### 6.1.3 Compression vidéo

La compression des séquences vidéo est le plus souvent réalisée à l'aide de schémas prédictifs [32]. Dans ces méthodes, on peut substituer une décomposition en ondelettes à la TCD traditionnellement employée pour le codage de l'erreur de prédiction. Cette erreur correspond à la différence entre la trame courante et la trame de référence (en général, la précédente) dont on a compensé le mouvement [74]. Dans ce contexte, il faut tenir compte du fait que les algorithmes d'estimation de mouvement par appariement de blocs (du type *block matching*) créent des « effets de blocs ». Ces artefacts se produisent sur les bords des blocs qui ont servi à l'algorithme de recherche. Par conséquent, l'image d'erreur de prédiction va présenter à ces endroits des contours artificiels et sa décomposition en ondelettes va conduire à des coefficients de forte amplitude, difficiles à coder.

Il est donc nécessaire de prendre certaines précautions en ce qui concerne la mise en œuvre des algorithmes d'estimation et de compensation du mouvement. Par exemple, si l'on utilise une méthode de type *block matching* (pour sa simplicité et ses bonnes performances globales), une compensation de mouvement avec chevauchement (*overlapped block matching compensation*) [59] doit être mise en place. On peut également envisager l'emploi d'estimateurs de mouvement, comme ceux *pel-récurrents* [15], qui ne souffrent pas de ce type d'artefacts.

Une solution alternative à ces approches prédictives est basée sur une décomposition en ondelettes 3D. L'idée est de réaliser une décomposition en ondelettes 1D dans la direction temporelle, suivie d'une AMR spatiale des sous-bandes temporelles résultantes. Plus intuitivement, la séquence vidéo peut être découpée temporellement en **groupes de trames**, qui peuvent être vus comme des volumes de pixels auxquels on applique une décomposition en ondelettes tridimensionnelle. Celle-ci peut se faire sans compensation de mouvement préalable, mais l'expérience montre que, dans ce cas, l'énergie des sous-bandes haute-fréquence reste élevée et le codage n'est pas d'une grande efficacité. Afin de mieux concentrer l'énergie dans la sous-bande d'approximation spatio-temporelle, une estimation/compensation de mouvement est réalisée avant le filtrage temporel [58]. Après cette opération, les pixels qui se correspondent dans les trames successives sont alignés et le filtrage temporel se fait suivant la direction du mouvement. Précisons que, dans la pratique, on utilise souvent des filtres de Haar pour l'analyse temporelle.

Les avantages d'une décomposition en sous-bandes 3D pour le codage vidéo sont notamment :

- une structure non récursive, qui évite la propagation des erreurs pouvant se produire lors de la transmission ou du stockage des images comprimées ;
- la possibilité d'obtenir facilement une scalabilité temporelle, en même temps qu'une scalabilité spatiale. Cette scalabilité temporelle est liée à la possibilité de décoder la séquence à différentes cadences. En ajoutant un codage progressif de l'information, du type SPIHT (*Set Partitioning in Hierarchical Trees*) [65], on introduit également une scalabilité en qualité.

### 6.1.4 Standards de compression utilisant des ondelettes

Parmi les standards actuels de compression d'image fixes ou de vidéo qui exploitent des décompositions en ondelettes, on peut

mentionner JPEG2000 (*Joint Picture Expert Group*), H26L et la partie codage d'images fixes de MPEG-4 (*Motion Picture Expert Group*).

H26L et son prédécesseur H263 sont des standards proposés par l'ITU (International Telecommunication Union), essentiellement pour des applications de visiophonie. H26L reprend les orientations générales de H263, en proposant de remplacer la TCD, appliquée dans H263 à l'erreur de prédiction, par une décomposition en ondelettes.

MPEG-4 est une norme de compression destinée aux applications vidéo interactives. MPEG-4 offre la possibilité de coder des images fixes par un algorithme proche de EZW. La différence essentielle réside dans la façon de coder la sous-bande d'approximation, qui est comprimée séparément par une technique MICD. Les filtres de décomposition ont été normalisés et ce sont les filtres biorthogonaux 9/7 qui ont été retenus.

JPEG2000 [43] est une nouvelle norme de compression d'images fixes qui est entièrement basée sur un codage à l'aide d'ondelettes. Deux types de fonctionnement sont possibles :

- le mode sans perte, pour lequel il est recommandé d'utiliser un « *lifting* » s'inspirant des filtres biorthogonaux 5/3, qui transforme les entiers en des entiers ;
- le codage avec pertes, pour lequel les filtres biorthogonaux 9/7 sont préconisés.

Notons qu'en tronquant plus ou moins le flux de bits générés dans le mode sans perte, on peut reconstruire une image de plus ou moins bonne qualité. On a ainsi la possibilité, avec le même algorithme, de passer progressivement d'une compression avec perte à une compression sans perte.

La méthode de codage est inspirée de l'algorithme EBCOT (*Embedded Block Coding with Optimized Truncation*) [73]. Les étapes principales sont les suivantes.

1. Une décomposition en ondelettes suivant un des modes décrits ci-dessus.
2. Un découpage de chaque sous-bande en blocs de taille fixe (par exemple,  $32 \times 32$  ou  $64 \times 64$ ), qui seront codés indépendamment. Ce partitionnement a l'avantage de permettre un accès facile à différentes parties de l'image et, en particulier, laisse la possibilité de la décoder dans un ordre différent de celui utilisé à l'encodage. Par ailleurs, cette opération limite la mémoire nécessaire lors de l'implantation matérielle et autorise également une parallélisation des traitements.
3. Une quantification scalaire uniforme avec « zone morte » des coefficients d'ondelettes. Le pas de quantification peut être différent dans chaque sous-bande.
4. Un codage en plusieurs « passes » des coefficients quantifiés : pour chaque plan de bits, les coefficients sont balayés suivant un ordre spécifique. Les bits indiquant les coefficients devenus significatifs à ce niveau font l'objet d'un codage arithmétique contextuel tenant compte de l'orientation de la sous-bande où se trouve le coefficient. Des contextes plus simples sont employés pour le codage des bits de raffinement. Ceux-ci servent à décrire les coefficients déjà répertoriés comme significatifs lors des passes antérieures. Tous les autres bits sont codés à l'aide d'une technique « *run-length* ».
5. Une allocation de débit entre les flux de bits correspondant aux différents blocs, qui permet de les coder avec des qualités variables, en exploitant éventuellement des critères d'appréciation psychovisuelle.

JPEG2000 permet également de traiter différemment des « régions d'intérêt » (ROI pour *regions of interest*), les coefficients d'ondelettes correspondant à ces zones étant codés en priorité.

La figure 43 montre un exemple de compression d'image à l'aide de JPEG2000.



Figure 43 – Luminance d’une image couleur comprimée d’un facteur 42 à l’aide de JPEG2000. La figure 37 donne la luminance de l’image originale

## 6.2 Débruitage

Les ondelettes et paquets d’ondelettes fournissent des moyens simples et efficaces d’estimer de façon non linéaire des signaux, en présence de bruit [40].

Partons de la situation assez commune où l’on observe un signal  $r(t)$  qui est la somme d’un signal utile inconnu  $s(t)$  et d’un bruit aléatoire  $b(t)$ . Après décomposition sur une base d’ondelettes, on conserve un modèle additif :

$$c_j^r | k | = c_j^s | k | + c_j^b | k | ,$$

où les lettres  $r$ ,  $s$  et  $b$  servent à distinguer les coefficients d’ondelettes des différents signaux mis en jeu.

**Nota :** certaines conditions techniques [8] sont nécessaires pour pouvoir définir les coefficients d’ondelettes d’un signal aléatoire.

Par souci de simplicité, nous supposons qu’une décomposition en ondelettes orthonormales périodiques (cf. § 2.4.3) est utilisée, de telle sorte que  $1 \leq j \leq j_{\max}$  et  $0 \leq k < K2^{-j}$ , le signal (à la résolution

$j = 0$ ) étant de longueur  $K$ , multiple de  $2^{j_{\max}}$ . Pour les coefficients d’approximation au niveau de résolution  $j_{\max}$ , le rapport signal sur bruit est généralement assez élevé pour qu’on puisse considérer que, pour  $k \in \{0, \dots, 2^{j_{\max}} - 1\}$ ,

$$a_{j_{\max}}^s | k | \approx a_{j_{\max}}^r | k | . \tag{32}$$

Le postulat sous-jacent dans les méthodes de débruitage à l’aide d’ondelettes est qu’un choix convenable de la base de décomposition facilite la discrimination du signal et du bruit. En effet, le signal est généralement assez « régulier » pour pouvoir être bien décrit par un petit nombre de coefficients d’ondelettes de grande amplitude. Au contraire, le bruit, souvent blanc et stationnaire, a tendance à s’équirépartir sur toutes les composantes. Dans la suite, nous ferons l’hypothèse que  $b(t)$  est un bruit blanc, gaussien, centré et de densité spectrale de puissance  $\sigma^2$ . Sa décomposition dans toute base orthonormale conduit donc à une suite de coefficients gaussiens, centrés et indépendants, de variance  $\sigma^2$ .

Tout d’abord, considérons le signal  $s(t)$  comme déterministe, d’énergie finie. Une méthode simple pour estimer  $s(t)$ , ou de façon équivalente ses coefficients d’ondelettes, consiste à produire le signal débruité  $\hat{s}(t)$  de coefficients d’ondelettes :

$$\hat{c}_j^s | k | = \theta_j | k | c_j^r | k |$$

$\theta_j | k | \in [0,1]$  étant un facteur d’atténuation à appliquer à chaque composante. En règle générale, on cherche à minimiser l’erreur quadratique moyenne d’estimation, qui, compte tenu de l’hypothèse (32), s’écrit :

$$\mathcal{E}^2 = E \left\{ \|s - \hat{s}\|^2 \right\} = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} E \left\{ |c_j^s | k | - \hat{c}_j^s | k | \right\}^2$$

où le symbole  $E\{\cdot\}$  désigne l’espérance de la qualité aléatoire en argument.

Les coefficients d’atténuation optimaux sont alors :

$$\theta_j | k | = \frac{|c_j^s | k |^2}{|c_j^s | k |^2 + \sigma^2}$$

En pratique, cet estimateur idéal n’est pas exploitable car il nécessite de connaître les coefficients  $c_j^s | k |$  que l’on cherche justement à déterminer. On dit qu’il s’agit d’un **oracle**.

Par des techniques élémentaires de seuillage des coefficients d’ondelettes, on peut cependant approcher les performances de cet oracle. Deux autres types d’estimateurs sont couramment utilisés pour cela :

— le **seuillage dur** :

$$\hat{c}_j^s | k | = \begin{cases} c_j^r | k | & \text{si } |c_j^r | k | > \chi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— le **seuillage doux** :

$$\hat{c}_j^s | k | = \begin{cases} c_j^r | k | - \chi & \text{si } c_j^r | k | > \chi \\ c_j^r | k | + \chi & \text{si } c_j^r | k | < -\chi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la valeur du seuil  $\chi$  est un réel positif.

Pour évaluer les performances de ces estimateurs, on peut adopter une **stratégie minimax**, c’est-à-dire examiner quelle est l’erreur minimale atteignable pour le signal se révélant le plus défavorable. Donoho et Johnstone [30] ont montré que pour  $\chi = \chi_U = \sigma \sqrt{2 \ln(K)}$  (*seuil universel*), la valeur de  $\mathcal{E}^2$  obtenue est asymptotiquement (quand  $K \rightarrow \infty$ ) du même ordre de grandeur que celle correspondant au meilleur estimateur au sens minimax. Précisons que, pour un nombre limité d’échantillons, les valeurs optimales du seuil sont inférieures à  $\chi_U$  et peuvent être calculées numériquement.

Pour mettre en œuvre ces seuillages, il est nécessaire de disposer de la variance du bruit. Lorsque celle-ci est inconnue, on peut l’estimer à partir des coefficients d’ondelettes à la résolution la plus fine ( $j = 1$ ), en supposant que le signal varie suffisamment lentement pour que ses coefficients  $(c_1^s | k |)_{0 \leq k < K/2}$  soient négligeables. Un estimateur robuste de l’écart-type du bruit est alors donné par :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0,6745} \text{Med} | c_1^r |$$

$\text{Med} | c_1^r |$  désignant la valeur médiane des coefficients

$$\left\{ |c_1^r | k | , 0 \leq k < K/2 \right\}$$

rangés par ordre croissant.

Souvent, les approches minimax fournissent des estimations trop pessimistes car elles sont optimales dans la pire des situations possibles qui, fort heureusement, est rarement celle à laquelle on se trouve confronté. Une meilleure stratégie peut consister à estimer empiriquement la valeur de l'erreur quadratique moyenne et à chercher à minimiser cette dernière pour une forme particulière de l'estimateur des données. Dans la suite, nous supposons que les coefficients d'ondelettes du signal sont des variables aléatoires de variance finie et que, à une même résolution, ils ont la même loi de probabilité. Si l'on s'intéresse plus précisément au seuillage doux, l'erreur quadratique moyenne d'estimation, à un niveau de résolution  $j$ ,

$$\mathcal{E}_j^2 = E \left\{ \left| c_j^s |k| - \hat{c}_j^s |k| \right|^2 \right\},$$

peut être réécrite à l'aide de la formule de Stein [13] :

$$\mathcal{E}_j^2 = E \left\{ J_\chi \left( |c_j^r |k||^2 \right) \right\},$$

où  $J_\chi$  est une fonction uniquement liée à la variance du bruit et au seuil :

$$J_\chi(u) = \begin{cases} u - \sigma^2 & \text{si } u \leq \chi^2 \\ \chi^2 + \sigma^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'intérêt de cette expression de  $\mathcal{E}_j^2$  est qu'elle ne dépend que des coefficients d'ondelettes du signal observé, ce qui fournit un moyen d'estimer  $\mathcal{E}_j^2$  sans biais en calculant :

$$\hat{\mathcal{E}}_j^2 = \frac{1}{K2^{-j}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} J_\chi \left( |c_j^r |k||^2 \right)$$

À chaque niveau de résolution  $j$ , un algorithme d'optimisation simple permet alors de déterminer la valeur  $\chi_{j,S}$  du seuil conduisant au minimum de  $\hat{\mathcal{E}}_j^2$  [31]. L'avantage de cette méthode (appelée *sureshrink* dans la littérature anglo-saxonne) est donc qu'elle s'ajuste automatiquement aux données à traiter.

La figure 44 compare les performances de *sureshrink* à celles du seuillage universel pour un signal Doppler. Les rapports signal sur bruit (RSB) sont donnés à titre indicatif. Bien que le résultat fourni par le seuillage universel puisse apparaître meilleur visuellement, cette méthode a tendance à trop fortement lisser le signal.

Les deux stratégies précédentes n'utilisent aucune connaissance statistique *a priori* sur le signal à estimer. Pourtant, la littérature, abondante sur les approches bayésiennes, montre que l'exploitation de telles informations (quand elles sont fiables) permet d'améliorer sensiblement les performances d'estimation. Aussi n'est-il pas surprenant que, dans un ensemble de travaux plus récents [78], [18], [1], [25] on ait étudié le couplage d'approches bayésiennes à des représentations multirésolution.

À titre d'exemple, considérons une modélisation Bernoulli-gaussienne des coefficients d'ondelettes du signal aléatoire  $s(t)$ . Ce modèle est défini à l'aide de variables aléatoires « cachées »  $q_j[k]$  qui sont binaires, indépendantes et telles que chaque composante  $c_j^s |k|$  de  $s(t)$  est :

- soit porteuse d'information, quand  $q_j[k] = 1$  ;
- soit nulle, quand  $q_j[k] = 0$ .

On suppose que le premier cas de figure se produit avec une probabilité  $P(q_j[k] = 1) = \varepsilon_j$  (généralement petite) et que les coefficients

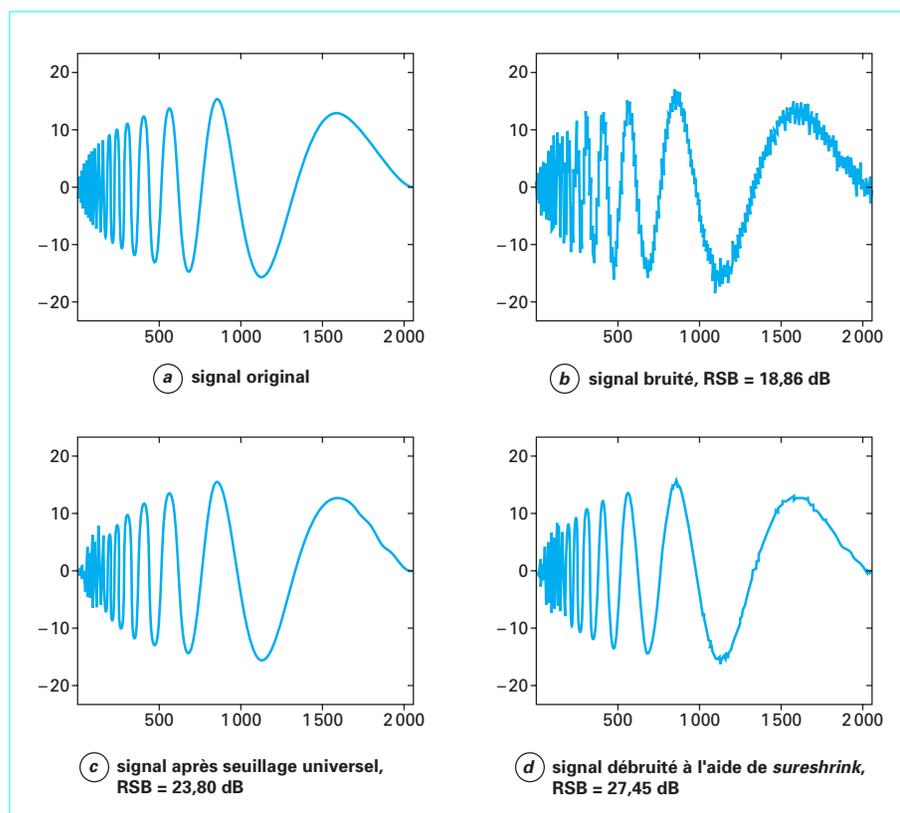


Figure 44 – Exemple de débruitage

$c_j^s|k|$  sont alors gaussiens, centrés, de variance  $\sigma_j^2$ . Sous ces hypothèses, l'estimateur du *Maximum A Posteriori* de  $c_j^r|k|$  est donné par :

$$\hat{q}_j|k| = \begin{cases} 1 & \text{si } |c_j^r|k|| > \chi_{j,B} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\chi_{j,B} \geq 0$  est un seuil qui est fonction de  $\sigma^2$ ,  $\sigma_j^2$  et  $\varepsilon_j$  mais qui est indépendant de la durée du signal [47]. Rappelons que, au contraire, le seuil universel croît en fonction du nombre de données, ce qui n'est pas très satisfaisant pour des signaux de longue durée. Finalement, les composantes du signal sont estimées par une règle de seuillage qui réalise une forme de compromis entre une estimation linéaire en moyenne quadratique et un seuillage dur :

$$\hat{c}_j^s|k| = \begin{cases} \frac{\sigma_j^2}{\sigma^2 + \sigma_j^2} c_j^r|k| & \text{si } \hat{q}_j|k| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autres types d'estimateurs peuvent cependant être mis en évidence si l'on change d'*a priori*, en recourant par exemple à des distributions gaussiennes généralisées [69]. Un point délicat dans ces méthodes bayésiennes est la détermination des paramètres du modèle statistique ( $\varepsilon_j$  et  $\sigma_j^2$ , dans le cas de Bernoulli-gaussien). Pour estimer ces paramètres, on doit généralement employer des méthodes itératives (maximum de vraisemblance généralisé, algorithme EM [29], méthodes MCMC [70]...). Les diverses solutions envisageables correspondent à des compromis performance/complexité différents.

Les principes des méthodes de débruitage que nous venons de présenter peuvent être appliqués à des décompositions en paquets d'ondelettes, qui conduisent généralement à une amélioration de la qualité des estimations réalisées. Pour le choix de la meilleure base, il est alors préférable d'utiliser un critère propre au débruitage, défini, par exemple, à l'aide de la fonction  $J_{\chi_{j,S}}$  introduite ci-dessus (voir aussi [45]).

Il faut aussi souligner que l'utilisation de représentations invariantes par translation (cf. paragraphe 4) permet presque systématiquement de réduire le niveau de bruit de manière plus efficace.

Pour conclure, signalons que des problèmes similaires à ceux de débruitage se posent pour l'estimation de densités de probabilité [42] ou de densités spectrales de puissance [37], pour la construction de tests statistiques [4] ainsi qu'en déconvolution [44].

### 6.3 Analyse des phénomènes fractals

L'introduction des ondelettes dans les problèmes de traitement du signal a été motivée par l'étude des phénomènes non stationnaires et la nécessité de trouver des méthodes d'analyse mieux adaptées à ce type de signaux que l'analyse de Fourier. Une classe de signaux aléatoires non stationnaires pour laquelle l'analyse en ondelettes présente un intérêt particulier est celle des **signaux autosimilaires**. Ces derniers fournissent des modèles pertinents pour un grand nombre d'applications : compression, infographie, géophysique, représentation du relief [61], analyse du trafic dans les réseaux informatiques [12], [3], étude des phénomènes de turbulence [2], prévisions financières [9]...

Les travaux de Mandelbrot [53], [52] sur les fractales ont popularisé la notion d'auto-similarité (ou « auto-affinité ») prise dans un sens très large. Une forme géométrique est autosimilaire si une même structure peut être observée, indépendamment de la distance à laquelle on regarde la forme ou, en d'autres mots, indépendamment de l'échelle d'observation. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser uniquement aux signaux aléatoires autosimilaires, définis à l'aide de leur loi de probabilité. Un signal aléatoire à temps

continu  $X(t)$  est un processus autosimilaire de paramètre (ou d'indice d'auto-similarité)  $H > 0$  si, pour tout  $\alpha > 0$ , on a :

$$X(\alpha t) \stackrel{d}{=} \alpha^H X(t)$$

où le symbole  $\stackrel{d}{=}$  est utilisé pour noter l'égalité en distribution. On rappelle que cette égalité en distribution signifie que, pour tout entier  $k$  et pour tout  $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ , les lois de probabilité de

$$\alpha^H (X(t_1), \dots, X(t_k)) \text{ et } (X(\alpha t_1), \dots, X(\alpha t_k))$$

sont identiques.

Un exemple de processus autosimilaire est le **mouvement brownien fractionnaire** (mBf).  $B_H(t)$  est un mBf d'indice fractionnaire  $H$  ( $0 < H < 1$ ) si  $B_H(t)$  est un signal aléatoire réel, centré et gaussien, nul à l'origine et tel que sa fonction d'autocorrélation est donnée par l'expression :

$$E\{B_H(t)B_H(u)\} = \frac{V_H}{2} (|t|^{2H} + |u|^{2H} - |t-u|^{2H}) \tag{33}$$

où  $V_H$  est un réel positif.

La variance du mBf,  $E\{B_H^2(t)\} = V_H|t|^{2H}$ , n'est pas constante en fonction du temps, ce qui montre bien qu'il s'agit d'un signal non stationnaire. Par contre, ses accroissements  $\Delta B_H(t; \tau) = B_H(t+\tau) - B_H(t)$  sont stationnaires pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ . Le paramètre d'auto-similarité  $H$  est lié aussi à la **dimension fractale** du signal, qui est donnée par  $D = 2 - H$  (pour une définition rigoureuse de  $D$ , le lecteur peut se reporter à [52]). Cette dimension caractérise la « rugosité » de la trajectoire : plus  $H$  est grand, plus l'allure du signal est « lisse ».

La notion d'échelle qui apparaît dans les processus autosimilaires rapproche naturellement ces signaux d'outils d'analyse (et, éventuellement, de synthèse) sensibles à l'échelle, tels que les transformations en ondelettes. En se plaçant dans le cadre des décompositions sur des bases d'ondelettes, la fonction d'autocorrélation des coefficients d'ondelettes du mBf, à deux niveaux de résolution  $j$  et  $j'$ , s'écrit [35] :

$$E\{c_{j|k}c_{j'|k}^*\} = -\frac{V_H}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} A_{\psi}^*(2^{j-j'}\tau - (2^{j-j'}k - \ell)) | \tau |^{2H} d\tau \right) 2^{j'(2H+1)} \tag{34}$$

où :

$$A_{\psi}(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi^*(\alpha t - \tau) dt$$

est la **fonction d'ambiguïté large-bande** de l'ondelette mère  $\psi(t)$ .

À partir de l'équation (34), on déduit que l'autocorrélation des coefficients d'ondelettes à une même échelle ( $j = j'$ ) dépend uniquement de leur différence de localisations temporelles  $k - \ell$ , ce qui conduit à la conclusion que les coefficients  $(c_{j|k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une suite stationnaire. Notons que les coefficients d'approximation restent non stationnaires. La formule (34) permet de calculer la variance des coefficients d'ondelettes du mBf :

$$E\{|c_{j|k}|^2\} = \beta_{H,\psi} 2^{j(2H+1)} \tag{35}$$

où  $\beta_{H,\psi}$  est une constante.

Cela fournit une façon simple d'estimer le paramètre  $H$ , à partir des valeurs  $\log_2(E\{|c_{j|k}|^2\})$ , en employant une méthode de moindres carrés (régression linéaire).

Les coefficients d'ondelettes d'un mBf sont faiblement corrélés quand le nombre de moments nuls de l'ondelette mère est suffisamment grand. Cela permet de synthétiser approximativement un mBf en partant de coefficients d'ondelettes gaussiens centrés et décorrélés dont les variances vérifient la relation (35). Une synthèse « exacte » est également possible en utilisant une AMR spécifique [66]. La figure 45 présente des trajectoires de mBf générées à l'aide de cette méthode.

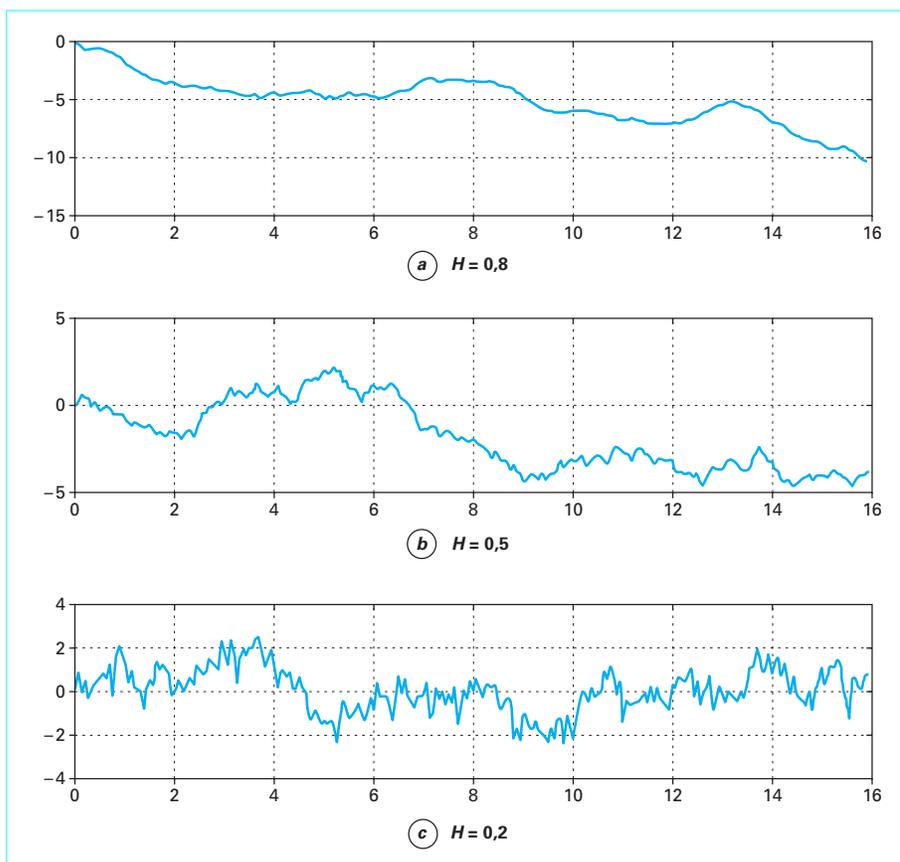


Figure 45 – Synthèse du mBf à l'aide d'ondelettes

## 7. Conclusion

Les ondelettes apparaissent comme une découverte importante en mathématiques appliquées. Dans de nombreux domaines d'applications où l'analyse de Fourier était traditionnellement employée, elles ont ouvert une voie alternative, souvent mieux adaptée à la nature des phénomènes étudiés. Elles ont également eu le mérite de favoriser le dialogue entre différentes communautés scientifiques intéressées par leurs potentialités.

Il serait pour autant faux de croire que les ondelettes sont la panacée à tous les problèmes. Par exemple, si l'on s'intéresse aux dérivées de fréquence dans un réseau électrique sinusoïdal, il est assez peu vraisemblable que les ondelettes soient les outils d'analyse idéaux.

Signalons que certains concepts avancés n'ont pu être abordés au cours de cet article comme les multi-ondelettes, les problèmes de régularité, ceux de caractérisation de certains espaces fonctionnels... Par ailleurs, les ondelettes restent un sujet actif de recherche s'enrichissant continuellement de nouvelles idées.