# Un cadre pour la reconstruction de signaux de faible complexité et son application à la parcimonie structurée

**Yann Traonmilin**[1,⋆], **Rémi Gribonval**[1]

1. INRIA, Rennes. ⋆Contact : yann.traonmilin@inria.fr

**Mots clés:** reconstruction parcimonieuse, acquisition compressée, isométrie restreinte, parcimonie structurée

Pour estimer un signal à partir d'observations sous déterminées, il est nécessaire de faire une hypothèse de régularité. La théorie de la reconstruction parcimonieuse donne un cadre puissant pour effectuer cette estimation. Des avancées récentes dans ce domaine montrent qu'une telle estimation est possible pour des modèles de régularité de faible complexité très généraux. Ces modèles permettent ainsi de modéliser beaucoup de signaux différents. Considérons des observations sous déterminées d'un signal $x \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert) par un opérateur linéaire $M$. La régularité de $x$ est définie par le fait que $x \in \Sigma$, où $\Sigma$ est l'espace modèle (de régularité). Souvent, $\Sigma$ contraint $x$ à être de faible complexité : peu de coordonnées non nulles pour les vecteurs parcimonieux, peu de valeurs singulières non nulles pour les matrices de rang faible, etc. Soit $f$ une fonction de régularisation. Il a été prouvé que le programme

$$\text{argmin}_{y \in E} f(y) \ s.t. \ My = Mx \tag{1}$$

permet de retrouver $x$ pour une selection de $M$, $\Sigma$ et de normes convexes $f$ [7]. On considère la question suivante : Etant donné le modèle de regularité $\Sigma$, quelles fonctions de régularisation $f$ permettent l'estimation de signaux de faible complexité $\Sigma$ ?

Pour répondre à cette question, on cherche des fonctions $f$ (que l'on préfèrera convexes) pour lesquelles la reconstruction peut être garantie pour un grand nombre d'opérateurs d'observation $M$. Les opérateurs $M$ qui vérifient une certaine propriété d'isométrie restreinte (RIP) permettent l'estimation stable de tout $x \in \Sigma$ lorsque $f$ est la norme $\ell^1$ et $\Sigma$ est l'ensemble des vecteurs $K$-parcimonieux [6]. Beaucoup de résultats RIP sont disponibles pour différents couples associant un modèle $\Sigma$ et une norme pour la régularisation $f$. Tous ces résultats cherchent souvent à généraliser le domaine d'application ou à affaiblir l'hypothèse RIP (augmentation de la constante RIP demandée). Par exemple, Cai and Zhang [5] ont donné un résultat RIP fin vérifié pour les vecteurs parcimonieux et les matrices de rang faible. De plus, Bourrier et al. [4] on montré qu'une RIP à gauche est une condition nécessaire pour l'estimation robuste de signaux ayant un modèle arbitraire $\Sigma$. Cela suggère que la RIP est un bon outil pour étudier théoriquement la reconstruction de faible complexité.

Dans cet exposé, on montre que pour une fonction de régularisation $f$ et un modèle $\Sigma$, on peut fournir un théorème de reconstruction uniforme ayant pour hypothèses une RIP sur $M$ avec une constante explicite $\delta_\Sigma(f)$. Cela donne un cadre pour vérifier si une fonction est une bonne candidate pour effectuer la reconstruction de faible complexité avec un modèle donné. Il est aussi possible d'obtenir des résultats de type acquisition compressée (matrice aléatoire $M$) grâce aux travaux de Puy et al. [8] où il est montré que la RIP est vérifiée sur des modèles très généraux, même en dimension infinie.

**Application : parcimonie structurée par blocs dans un espace de dimension infinie.** Ayaz et al. [2] ont donné un résultat de reconstruction uniforme pour l'acquisition compressée structurée sous une hypothèse RIP en dimension finie. Dans ce cas, la fonction de régularisation est une norme mixte $\ell^1 - \ell^2$ (norme de groupe) et une constante RIP de $\delta = \sqrt{2} - 1$ sur les vecteurs de $\Sigma - \Sigma$ garantit la reconstruction des vecteurs de $\Sigma$. Dans [1], Adcock and Hansen proposent une stratégie d'échantillonnage généralisé pour estimer les signaux parcimonieux en dimension infinie. Avec notre nouveau cadre théorique, on peut montrer que la constante RIP pour les vecteurs parcimonieux par groupe de Ayaz et al. peut être amélioré pour la constante fine $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On généralise ces résultats à la parcimonie structurée par bloc et à la dimension infinie ce qui permet de traiter le cas de l'échantillonnage généralisé de [1] tout en améliorant les constantes RIP disponibles de [3]. Cette étude fait aussi apparaitre de nouvelles régularisation plus performantes sous la forme de pondération des normes de groupes. Cela nous amènera à discuter des conséquences de ces travaux pour la conception de nouvelles fonctions de régularisation adaptées à un modèle donné.

## Références


[1] Adcock, B. and A. C. Hansen (2012). A generalized sampling theorem for stable reconstructions in arbitrary bases. *Journal of Fourier Analysis and Applications 18*(4), 685–716.

[2] Ayaz, U., S. Dirksen, and H. Rauhut (2014, July). Uniform recovery of fusion frame structured sparse signals.

[3] Bastounis, A. and A. C. Hansen (2015). On random and deterministic compressed sensing and the restricted isometry property in levels. In *Sampling Theory and Applications (SampTA), 2015 International Conference on*, pp. 297–301. IEEE.

[4] Bourrier, A., M. Davies, T. Peleg, P. Perez, and R. Gribonval (2014, Dec). Fundamental performance limits for ideal decoders in high-dimensional linear inverse problems. *Information Theory, IEEE Transactions on 60*(12), 7928–7946.

[5] Cai, T. and A. Zhang (2014, Jan). Sparse representation of a polytope and recovery of sparse signals and low-rank matrices. *Information Theory, IEEE Transactions on 60*(1), 122–132.

[6] Candès, E. J. (2008, May). The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathematique 346*(9-10), 589–592.

[7] Candès, E. J., J. Romberg, and T. Tao (2006, February). Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *Information Theory, IEEE Transactions on 52*(2), 489–509.

[8] Puy, G., M. E. Davies, and R. Gribonval (2015, February). Linear embeddings of low-dimensional subsets of a Hilbert space to R$^m$ . Technical report, INRIA - IRISA - PANAMA ; Institute for Digital Communications (IDCom) - University of Edinburgh.