Feuille de TD 1 : Structure de Groupe

Notations des exercices :
$\heartsuit$: Exo de cours ou application directe.
$\spadesuit$: Exercice classique. A savoir refaire
$\bigstar$: Exercice ou question difficile.
Sans icône : Exercice d'exploration.

Exercice 1 ($\heartsuit$ Groupe ou pas groupe).
Pour chaque ensemble E, on propose trois lois de compositions internes différentes. Déterminer parmi les lois proposées celles qui font de cet ensemble un groupe.

(1) $E = \mathbb{R}$, on considère les lois d'addition $+$ de multiplication $\times$ et une loi $\star$ définie par $x \star y = x + y - xy$.
(2) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, on considère les lois d'addition $+$, de multiplication $\times$ et de composition usuelle des fonctions $\circ$.
(3) Soit X un ensemble quelconque. On pose $E = \mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}$, l'ensemble des parties de X. On considère les lois d'union $\cup$ d'intersection $\cap$ et la loi Δ définie par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

où $\overline{A}$ est le complémentaire de A. (On pourra se contenter de dessiner des diagrammes pour montrer l'associativité de cette dernière loi)

Exercice 2 ($\heartsuit$ Exemples de base).
Pour chacun des ensembles E suivants, vérifier rapidement que la loi proposée est associative et qu'elle possède bien un élément neutre (qu'on déterminera). Déterminer l'ensemble E^* des éléments inversibles pour cette loi.

(1) $E = \mathbb{Z}$ avec la multiplication.
(2) $E = \mathbb{R}^n$ avec la loi d'addition des vecteurs.
(3) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ avec la multiplication.
(4) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ avec la composition usuelle.
(5) $E = \{a + ib \in \mathbb{C}\,,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de Gauss pour la multiplication.

Exercice 3 ($\spadesuit$ Exposant 2).
Soit $(G, *)$ un groupe tel que pour tout $g \in G$, on a $g * g = e$. Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 4 ($\spadesuit$ Sous-groupes classiques).
Montrer que les exemples suivants sont des groupes :

(1) Les racines 5-iemes de l'unité $\mathbb{U}_5 = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\}$ muni de la multiplication.
(2) Soit $u \in \mathbb{R}^2$ fixé. Soit $E_u = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,|\, f \text{ bijective et } f(u) = u\}$ muni de la composition usuelle $\circ$.
(3) L'ensemble $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ des matrices complèxes de taille n et de determinant 1, muni de la multiplication usuelle $\times$.
(4) Les fonctions polynômiales : $\{f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0\,,\ n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition usuelle.

Exercice 5 (Table des petits groupes)**.**
Soit G un groupe fini. $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$.
La *table* de G est la table de multiplication correspondant à la loi $*$. C'est à dire un tableau à double entrée, avec chaque élément de G en ligne et en colonne. La case (i, j) du tableau correspond à $g_i * g_j$. Par convention, on mettra toujours l'élément neutre en première position, c'est à dire que $g_1 = e$.

(1) Montrer que pour toute ligne (et toute colonne) de la table de G, chaque élément de G apparait une et une seule fois.
(2) Soit $G = \{e, a\}$ un groupe à deux éléments (avec e son élément neutre). Montrer qu'il n'y a qu'une seule façon d'écrire la table de G.
(3) Faire de même pour un groupe à trois éléments $G = \{e, a, b\}$.

(4) ($\bigstar$) Pour un grouipe à 4 éléments $G = \{e, a_1, a_2, a_3\}$.
- Montrer qu'il existe un élément a_i tel que $a_i * a_i = e$.
- On suppose que $a_1 * a_1 = e$. Montrer qu'il y a seulement deux choix possibles pour remplir le reste de la table de G.
- Montrer que ces deux choix ne sont pas équivalents (qu'on ne peut pas obtenir une table à partir de l'autre en changeant simplement les indices).

Exercice 6 ($\bigstar$ Tous les éléments sont réguliers)**.**
Soit E un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Soit $a \in E$ fixé.
(Un élément x est dit *régulier* pour la loi $\star$ si $\forall y, z \in E, [(x \star y = x \star z) \Rightarrow (y = z)]$).

(1) Montrer que l'application $\phi(x) = a \star x$ est une bijection de E dans E. En déduire qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$.
(2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $e \star x = x$.
(3) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $x \star e = x$.
(4) Démontrer que $(E, \star)$ est un groupe.
(5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Exercice 7 ($\bigstar$ Translations surjectives)**.**
Soit $(E, *)$ un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne associative telle que :
$$\forall a, b \in E, \exists x, y \in E\,, a = x * b = b * y$$
Montrer que E est un groupe.
(Indication : On peut suivre à peu près mêmes étapes que l'exercice précédent)

Exercice 8 ($\heartsuit$ Groupe produit)**.**
Soit $(G, \star)$ et $(H, \Box)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\otimes$ définie par :
$$(x, y) \otimes (x', y') = (x \star x', y \Box y')$$

(1) Montrer que $(G \times H, \otimes)$ est un groupe.
(2) Montrer que si G et H sont des groupes abéliens, alors $G \times H$ est un groupe abélien.
(3) ($\spadesuit$) On a les groupes classiques $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$. On considère une autre loi $\ltimes$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ définie par
$$(x, t) \ltimes (x', t') = (x + tx', tt')$$
Montrer que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \ltimes)$ est bien un groupe.
(4) Montrer que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \ltimes)$ et $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 9 (♡ Sous-groupes généraux)**.**
Soit G un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G.

(1) Le *centre* de G, défini par $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, xy = yx\}$.
(2) Si H est un sous-groupe de G et $a \in G$ on définit le *conjugué* de H par :

$$aHa^{-1} = \{x \in G | \exists h \in H, x = aha^{-1}\}$$

Exercice 10 (♠ Image réciproque, image directe de sous-groupe)**.**
Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \star)$ des groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$.

(1) Montrer que si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. (On rappelle que $f^{-1}(H') = \{g \in G, f(g) \in H'\}$.)
(2) Montrer que si H est un sous-groupe de G alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

Exercice 11 (♠ Quelques morphismes)**.**
Montrer que les applications suivantes sont des morphismes, et déterminer leur noyau et leur image.

(1) L'application $g : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ définie par $g(x) = 3x$.
(2) L'application $h : (\mathbb{C}^*, \times) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ définie par $h(z) = \frac{z}{|z|}$.
(3) L'application déterminant $det : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$.
(4) Pour $n \geq 1$ un entier, l'application $f_n : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{C}^*)$ définie par $f_n(k) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Exercice 12 (★)**.** Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$. Soit également

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) Montrer que $(\mathcal{D}, \times)$ et $(W, \times)$ sont des groupes.
(2) On considère l'application $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow W$ définie par :

$$\Psi(f) = \begin{pmatrix} f(0) & f'(0) \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

Montrer que Ψ est un morphisme de groupe.
(3) Montrer que Ψ est surjective. Quel est le noyau de Ψ ?

Exercice 13 (♠ Théorème de Cayley)**.**
Soit G un groupe, et Bij(G) le groupe des bijections de l'**ensemble** G dans lui-même

(1) Soit $g \in G$. Montrer que l'application ϕ_g est bijective, avec :

$$\begin{aligned} \varphi_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

(2) Montrer que l'application Φ est un morphisme de groupe, avec :

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \mathrm{Bij(G)} \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

(3) En déduire que tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe de Bij(G).

Exercice 14 (♠)**.** Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 15 (♠ Sous-groupe engendré).
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer les sous-groupes $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$.
(2) Déterminer le sous-groupe $\langle C \rangle$ avec $C = AB$.
(3) En déduire que $\langle A, B \rangle$ est un groupe infini.

Exercice 16 (Exploration d'un groupe).
On considére un pentagone régulier. On considère l'ensemble P formés des rotations et des symétries qui laissent le pentagone globalement invariant.

(1) Donner la liste des éléments de P et montrer que P est un groupe à 10 éléments.
(2) Combien P possède t'il de sous-groupes ? (Commencer par lister les sous-groupes engendrés par 1 élément, puis les sous-groupes engendrés par 2 éléments, etc ...)
(3) Est-ce que P est cyclique ?

Exercice 17 (★ Loi Δ).
Soit E un ensemble et $G = \mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$ l'ensemble des parties de E. muni de la loi Δ, définie par $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ (voir exo 1).

(1) Soit $a \in E$. On définit $\phi_a : G \to (\{-1, 1\}, \times)$ par $\phi_a(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \notin X \\ -1 \text{ si } a \in X \end{cases}$.

   Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes de (G, Δ) vers $\{-1, 1\}$.
(2) On considère $E = \{1, \dots, n\}$ et on note

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \{-1, 1\}^n \\ X &\longmapsto (\phi_1(X), \dots, \phi_n(X)). \end{aligned}$$

   Montrer que ϕ est un Isomorphisme de groupes

Exercice 18 (♠ Endomorphismes d'ensembles de nombres).

(1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\phi_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $\phi_a(z) = az$ est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Montrer que si ψ est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ alors il existe un unique $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi = \phi_a$.
(3) Sur le même principe, déterminer tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
(4) (★★) Et les endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$? (continus ou non continus)

Exercice 19 (♠ PGCD × PPCM). Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Et soient $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$.

(1) Soit $x \in m\mathbb{Z}$. Justifier que $\langle ax, bx \rangle \subset ab\mathbb{Z}$.
(2) Soient a', b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Justifier que $da'b' \in m\mathbb{Z}$.
(3) Montrer que $md = ab$.

Exercice 20 (★ Arithmétique élémentaire).
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(1) Supposons $\langle a, b \rangle = \mathbb{Z}$. Montrer que $\langle a, bc \rangle = \langle a, c \rangle$.
(2) En déduire que si $bc \in a\mathbb{Z}$ et $\langle a, b \rangle = \mathbb{Z}$ alors $c \in a\mathbb{Z}$. Traduisez cette question en terme de pgcd et de divisibilité. Reconnaissez-vous le résultat ?
(3) Montrer que si $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $d\mathbb{Z}$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\langle a, b \rangle = d\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.