Devoir Maison

A rendre pour le Jeudi 7 Mars

Les deux exercices sont indépendants. On apportera un soin particulier à la présentation et à la rédaction.

Exercice 1 (Un groupe de matrices)**.**

Soit l'ensemble suivant

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } (a,b) \neq (0,0) \right\}$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. (Pour la multiplication des matrices)

(2) Soit $\mathcal{U} = \{M \in \mathcal{C} \mid \det(M) = 1\}$. Justifier que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $\mathcal{C}$.

(3) Soit $P : G \to G$ l'application définie par $P(M) = MM^\top$, où $M^\top$ désigne la transposée de M. Montrer que P est un morphisme et déterminer son noyau et son image.

(4) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{C}$, si x est d'ordre fini, alors $x \in \mathcal{U}$.

(5) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la matrice R_θ par

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Montrer que l'application $\phi : \theta \mapsto R_\theta$ est un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$. Déterminer son noyau et son image.

(6) Soit H un sous-groupe **d'ordre fini** de $\mathcal{C}$. Montrer que $H < \mathcal{U}$.

(7) Soit G la préimage de H par le morphisme ϕ, c'est à dire $G = \phi^{-1}(H)$. Montrer que $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ est non-vide et admet un minimum.

En déduire que G est un groupe monogène, puis que H est un groupe cyclique.

(8) Le groupe $\mathcal{C}$ est isomorphe à un groupe bien connu. Déterminer ce groupe et exhibez un isomorphisme de $\mathcal{C}$ vers ce groupe. (Cette question est indépendente du reste de l'exercice)

Tournez S.V.P.

Exercice 2 (Sous-groupes distingués)**.**

Soit G un groupe.

Définition. *Soit H un sous-ensemble de G. On dit que H est un* sous-groupe distingué *dans G (et on note cette propriété $H \lhd G$) si H est un sous-groupe de G, et que la condition suivante est vérifiée :*

$$\forall h \in H, \forall x \in G, xhx^{-1} \in H$$

Le but de l'exercice est de se familiariser avec ces sous-groupes et de voir pourquoi ils permettent de définir une loi de groupe sur G/H.

(1) On commence par un exemple. Dans le groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-groupes. Puis montrer que $\mathcal{E}$ est distingué dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, mais que $\mathcal{D}$ n'est pas distingué dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

(2) Montrer que si G est commutatif et $H < G$, alors $H \lhd G$.

(3) Montrer que le centre $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

(4) Soit G' un autre groupe, et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un sous-groupe distingué dans G.

(5) Est-ce que l'image Im(f) est un sous-groupe distingué de G' ? (Justifier votre réponse)

(6) Pour le reste de l'exercice, on suppose que H est un sous-groupe distingué de G. Soient $x, x', y, y' \in G$. Montrer que :

$$\text{Si } x \underset{H}{\sim} x' \text{ et } y \underset{H}{\sim} y', \text{ alors on a } (xy) \underset{H}{\sim} (x'y')$$

(La relation $\underset{H}{\sim}$ est la relation d'équivalence définie à partir de H)

(7) Justifier que la loi de composition interne, :

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (xH, yH) &\longmapsto (xy)H \end{aligned}$$

est bien définie. (On dit qu'une application sur un ensemble quotient est bien définie si elle ne dépend pas du représentant choisi)

(8) Montrer que G/H, muni de cette loi, est un groupe. En déduire que l'application $\pi : G \longrightarrow G/H$ définie par $\pi(x) \longmapsto xH$ est un morphisme surjectif dont le noyau est H.