Feuille 3 : Anneaux

Exercice 34. Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On note A l'ensemble des endomorphismes de $(G,+)$. On munit l'ensemble A de la loi d'addition induite par $(G,+)$, c'est à dire

$$\forall \psi, \phi \in A, \forall g \in G, (\phi+\psi)(g) = \phi(g) + \psi(g)$$

Montrer que $(A,+,\circ)$ est un anneau (unitaire).

Exercice 35. Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif. et $x, y \in A$.
Montrer que xy est inversible si et seulement si x et y sont inversibles.

Exercice 36 (Elements nilpotents)**.** Soit A un anneau commutatif et $x \in A$. on dit que x est *nilpotent* si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Soit x et y deux éléments nilpotents de A.

(1) Montrer que x n'est pas inversible, et que $1-x$ est inversible
(2) Montrer que xy et $x+y$ sont nilpotents.

Exercice 37. Déterminer l'ensemble des inversibles, des diviseurs de 0 et des nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 38. Déterminer si les applications suivantes sont des morphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{rl} \phi : \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto P'(0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} \psi : \mathbb{R}[X] & \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 39. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et J un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.

Exercice 40 (Opération sur les idéaux)**.**
Soit I et J deux idéaux d'un anneau A. On définit les deux ensembles

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\} \qquad \text{et} \qquad I \cdot J = \left\{ z = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, x_k \in I, y_k \in J \right\}$$

(1) Montrer que $(I \cap J)$, $(I+J)$ et $(I \cdot J)$ sont tous des idéaux de A
(2) Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$

Exercice 41. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ est un anneau. (On montrera que c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.)
(2) On définit la fonction $N(a+b\sqrt{10}) = a^2 - 10b^2$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$
(3) En déduire que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
(4) Montrer que l'équation $a^2 - 10b^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.
(5) En déduire que 2 est irreductible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
(6) En décomposant 10 de deux façons différentes dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, montrer que 2 n'est pas premier.

Exercice 42. [Nombre de racines d'un polynôme]
Soit $\mathbb{K}$ un corps, $a \in K$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$ est $P(a)$.
(2) En déduire que $P(a) = 0$ si et seulement si P est dans l'idéal engendré par $(X-a)$.
(3) Supposons que $P \neq 0$. Montrer qu'il existe au plus $d^\circ(P)$ éléments x de $\mathbb{K}$ tels que $P(x) = 0$.
(4) Soit p un nombre premier et n l'exposant du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. En considérant le polynôme $X^n - 1$, montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique. (On pourra utiliser le résultat suivant : Dans un groupe commutatif, il existe un élément dont l'ordre est égal à l'exposant).