Chapitre 2

Continuité

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1 (Continuité en un point) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$.*

1. *On dit que f est continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

2. *On dit que f est séquentiellement continue en a si f transforme toute suite convergente vers a en suite convergente vers $f(a)$, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

Remarque 2.1 Sous les hypothèses de la définition 2.1 et si il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b,a[\cup]a,c[$, il est facile de voir que f est continue en a si et seulement si $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Théorème 2.1 (Continuité versus continuité séquentielle) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$. Alors, f continue en a si et seulement si f est séquentiellement continue en a.*

Démonstration : La démonstration n'est pas détaillée ici. Il suffit essentiellement de reprendre celle de la proposition 1.2. ■

Remarque 2.2 La continuité en un point est une propriété locale. En effet, Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$. Soit $\gamma > 0$. On pose $\tilde{D} = D \cap]a-\gamma, a+\gamma[$. On appelle $\tilde{f}$ la restriction de f a $\tilde{D}$ (c'est-à-dire que $\tilde{f}$ est définie sur $\tilde{D}$ et $\tilde{f} = f$ sur $\tilde{D}$). Alors, f est continue en a si et seulement si $\tilde{f}$ est continue en a.

Définition 2.2 (Continuité) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on dit que f est continue si f est continue en tout point de D.*

On donne maintenant la définition de la continuité uniforme, plus forte que la continuité.

Définition 2.3 (Continuité uniforme) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on dit que f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :*

$$x, y \in D, \ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 2.1 On prend ici $D =]0,1[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0,1[$. L'application f est continue (c'est-à-dire continue en tout point de D) mais n'est pas uniformément continue.

Proposition 2.1 (Somme, produit et quotient d'applications continues) *Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$. On suppose que f et g sont continues en a. Alors :*

1. *L'application $f + g$ est continue en a,*
2. *L'application fg est continue en a,*
3. *Il existe $\beta > 0$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour $x \in D \cap]a - \beta, a + \beta[$ et f/g (qui est bien définie pour $x \in D \cap]a - \beta, a + \beta[$) est continue en a.*

DÉMONSTRATION : Ici aussi, il suffit essentiellement de reprendre la démonstration de la proposition 1.6. ■

Proposition 2.2 (Continuité de la composée) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g une application de $E \subset \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in D\} \subset E$ (de sorte que $g \circ f$ est définie sur D). Soit $a \in D$. On suppose que f est continue en a et g est continue en $f(a)$. Alors, $g \circ f$ est continue en a.*

DÉMONSTRATION : Ici aussi, il suffit essentiellement de reprendre la démonstration de la proposition 1.8. ■

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire que pour tout γ appartenant à l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ t.q. $f(c) = \gamma$).*

DÉMONSTRATION : On distingue deux cas possibles.

Premier cas. On suppose que $f(a) \leq f(b)$. Soit $\gamma \in [f(a), f(b)]$. On pose $A = \{x \in [a, b] \text{ t.q. } f(x) \leq \gamma\}$. L'ensemble A est non vide (car il contient a) et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure que nous notons c. On a, bien sûr, $a \leq c \leq b$ ($a \in A$ et b est un majorant de A). On va montrer que $f(c) = \gamma$.

On commence par remarquer qu'il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A t.q. $\lim_{n \to +\infty} c_n = c$ (voir, par exemple, l'exercice 1.6). Par continuité de f en c, on a donc $f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(c_n)$ et donc, comme $f(c_n) \leq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $f(c) \leq \gamma$.

On suppose maintenant que $f(c) < \gamma$ (et on va montrer que ceci est impossible). On a donc $c < b$ (car $f(b) \geq \gamma$). On pose $\varepsilon = \gamma - f(c) > 0$. Par continuité de f en c, il existe donc $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in [a, b], \ |x - c| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

On a donc, en particulier, avec $\beta = \min(\alpha, b - c) > 0$,

$$c \leq x \leq c + \beta \Rightarrow f(x) \leq f(c) + \varepsilon = \gamma.$$

Ceci prouve que (par exemple) $c + \beta \in A$, en contradiction avec la définition de c (qui est $c = \sup A$). On a ainsi montré que $f(c)$ n'est pas strictement inférieur à γ. On a donc $f(c) = \gamma$.

Deuxième cas. On suppose que $f(a) > f(b)$. Soit $\gamma \in [f(b), f(a)]$. On montre alors qu'il existe $c \in [a, b]$ t.q. $f(c) = \gamma$ par un raisonnement semblable au précédent en prenant $A = \{x \in [a, b] \text{ t.q. } f(x) \geq \gamma\}$. Ce raisonnement n'est pas détaillé ici. ■

Remarque 2.3 Voici deux conséquences immédiates du théorème des valeurs intermédiaires.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\{f(x),\ x \in [a, b]\}$ contient l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors, f vérifie la "propriété des valeurs intermédiaires", c'est à dire : Pour tout $a, b \in I$, $a < b$, $\{f(x),\ x \in [a, b]\}$ contient l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque 2.4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. La remarque précédente montre que la continuité de f implique que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque est fausse, c'est-à-dire que le fait que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas la continuité de f. (La propriété des valeurs intermédiaires peut être présentée comme une sorte de continuité avec la notion d'ordre dans $\mathbb{R}$, alors que la continuité fait plutôt appel à la notion de distance.) Nous verrons au chapitre 3 que si f est dérivable de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires mais n'est pas toujours continue.

2.3 Fonction continue sur un intervalle fermé borné

Théorème 2.3 (fonction continue sur un compact) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application f est bornée et atteint ses bornes. (c'est-à-dire qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et $c, d \in [a, b]$ t.q. $f(c) = m$, $f(d) = M$ et, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.)*

Démonstration :

Etape 1 On montre tout d'abord que f est majorée (c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in [a, b]\}$ est majorée). Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose donc que f n'est pas majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme f n'est pas majorée, l'ensemble $A_n = \{x \in [a, b] \text{ t.q. } f(x) \geq n\}$ est non vide. Comme cet ensemble est majoré par b, il admet une borne supérieure, notée x_n, et on a $x_n \in [a, b]$. On sait aussi que x_n est limite d'une suite de point de A_n. Comme f est continue en x_n, on a donc $f(x_n) \geq n$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (car $A_{n+1} \subset A_n$) et minorée (par a). Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. On pose $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $a \leq x \leq b$, et comme f est continue en x, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$, ce qui impossible car $f(x_n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$).

On a donc montré que f est majorée. Un raisonnement similaire non fait ici permet de montrer que $f$est minorée.

Etape 2 On note $M = \sup\{\mathrm{Im}(f)\}$. On montre maintenant qu'il existe $d \in [a, b]$ t.q. $f(d) = M$. Pour cela, on utilise un raisonnement semblable à celui de la première étape.

Soit $n \in \mathbb{N}$, On pose $M_n = M - \frac{1}{n}$ et $B_n = \{x \in [a,b]$ t.q. $f(x) \geq M_n\}$. Comme M_n n'est pas un majorant de $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble B_n est non vide. Comme cet ensemble est majoré par b, il admet une borne supérieure, notée y_n, et on a $y_n \in [a,b]$. Comme y_n est limite d'une suite de point de B_n et que f est continue en y_n, on a donc $f(y_n) \geq M_n$. (On a aussi $f(y_n) \leq M$ car $M = \sup\{\mathrm{Im}(f)\}$.)

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $B_{n+1} \subset B_n$) et minorée (par a). Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. On pose $d = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Comme $a \leq y_n \leq b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $a \leq d \leq b$ et, comme f est continue en d, on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(d)$. On en déduit que $f(d) = M$ en passant à la limite sur les inégalités $M_n = M - \frac{1}{n} \leq f(y_n) \leq M$.

Un raisonnement similaire non fait ici permet de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) = m = \inf(\mathrm{Im}(f))$.

■

Exemple 2.2 On prend ici $I =]0,1[$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \in]0,1[$. Pour cet exemple, l'application f est non majorée et elle est minorée mais sa borne inférieure est non atteinte.

Le théorème 2.2 permet de montrer que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. Avec le théorème 2.3 , on a même que l'image par une application continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné. Ceci est donné dans le théorème 2.4.

Théorème 2.4 (Image d'un intervalle par une application continue)
Soit I intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in I\}$. *Alors :*

1. *L'ensemble* $\mathrm{Im}(f)$ *est un intervalle. (Autrement dit, l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.)*
2. *Si $I = [a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a* $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$ *avec $m, M \in \mathbb{R}$ (on peut noter que* $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$ *et* $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$*). (Autrement dit, l'image par une application continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.)*

Démonstration :
On montre tout d'abord le 1er item du théorème. Si $\mathrm{Im}(f)$ est minorée, on pose $\alpha = \inf(\mathrm{Im}(f))$. Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas minorée, on pose $\alpha = -\infty$ (dans ce cas, on pose aussi $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$). De même, si $\mathrm{Im}(f)$ est majorée, on pose $\beta = \sup(\mathrm{Im}(f))$. Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas majorée, on pose $\beta = +\infty$ (dans ce cas, on pose aussi $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$).

La définition de α et β donne donc immédiatement que $\mathrm{Im}(f) \subset [\alpha, \beta]$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle, il suffit de montrer que $]\alpha, \beta[\subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Comme γ n'est pas un minorant de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $a \in I$ t.q. $f(a) < \gamma$. De même, Comme γ n'est pas un majorant de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $b \in I$ t.q. $f(b) > \gamma$. le nombre γ est donc compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé borné dont les bornes sont a et b, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne qu'il existe x entre a et b (et donc x dans I) t.q. $f(x) = \gamma$. On a donc bien montré que $]\alpha, \beta[\subset \mathrm{Im}(f)$ et donc que $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle (c'est un intervalle dont les bornes sont α et β).

On montre maintenant le deuxième item du théorème. Le théorème 2.3 montre qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et $c, d \in [a,b]$ t.q. $f(c) = m$, $f(d) = M$ et que $\mathrm{Im}(f) \subset [m, M)$. Puis le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) montre que pour tout $\gamma \in [m, M]$, il existe x entre c et d (et donc $x \in [a,b]$) t.q. $f(x) = \gamma$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$. ■

2.4 Fonction strictement monotone et continue

Théorème 2.5 *Soit I un intervalle (de $\mathbb{R}$) dont les extrémités sont a et b, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$, et f une application strictement croissante, continue, de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf(\mathrm{Im}(f))$ (avec $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ si $\mathrm{Im}(f)$ est non minorée), $\beta = \sup(\mathrm{Im}(f))$ (avec $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ si $\mathrm{Im}(f)$ est non majorée). Alors :*

1. *$\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle dont les extrémités sont α et β. On note J cet intervalle.*
2. *Si $I =]a, b[$, on a alors $J =]\alpha, \beta[$.*
3. *L'application f est bijective de I dans J.*
4. *On note g la fonction réciproque de f (c'est-à-dire g définie de J dans I t.q. $g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in I$ et $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in J$). L'application g est continue et strictement croissante (de J dans I).*

Démonstration :

1. Le théorème 2.4 donne que $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle. La définition de α et β donne alors que les extrémités de cet intervalle sont α et β.
2. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f) =]\alpha, \beta[$ (lorsque $I =]a, b[$), il suffit de montrer que $\alpha \notin \mathrm{Im}(f)$ et $\beta \notin \mathrm{Im}(f)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose que $\alpha \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $c \in]a, b[$ t.q. $f(c) = \alpha$ (et donc $\alpha \in \mathbb{R}$). Mais, en prenant $y \in]a, c[$, on a alors, grâce à la stricte croissance de f, $f(y) < f(c) = \alpha$, ce qui contradictoire avec la définition de α. Donc, $\alpha \notin \mathrm{Im}(f)$. De manière analogue, on peut montrer que $\beta \notin \mathrm{Im}(f)$. On a bien ainsi montré que $\mathrm{Im}(f) =]\alpha, \beta[$.
3. La fonction f est surjective de I dans J (car $J = \mathrm{Im}(f)$). Il reste à montrer que f est injective, mais ceci est une conséquence simple de la stricte croissance de f. En effet, soit $x, y \in I$, $x \ne y$. Si $x > y$, on a $f(x) > f(y)$. Si $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Dans les deux cas, on a donc $f(x) \ne f(y)$, ce qui prouve l'injectivité de f. L'application f est donc bien une bijection de I dans J.
4. On note g la fonction réciproque de f (g est donc définie de J dans I). On remarque tout d'abord que g est strictement croissante. En effet, soit $x, y \in J$, $x < y$. Si $g(x) \ge g(y)$, on a, par la croissance de f, $x = f(g(x)) \ge f(g(y)) = y$, ce qui est impossible. On a donc $g(x) < g(y)$, ce qui prouve que g est strictement croissante. Il reste à montrer que g est continue en tout point de J. Soit $\alpha < \gamma < \beta$. Comme g est croissante, g admet des limites à droite et à gauche en γ, notées $g_l(\gamma)$ et $g_r(\gamma)$, et ces limites encadrent $g(\gamma)$ (proposition 1.9). Plus précisément :

$$\lim_{x \to \gamma, x < \gamma} g(x) = \sup\{g(x), x < \gamma\} = g_l(\gamma) \le g(\gamma) \le g_r(\gamma) = \inf\{g(x), x > \gamma\} = \lim_{x \to \gamma, x > \gamma} g(x).$$

   Mais, comme $\mathrm{Im}(g)$ est un intervalle (car $\mathrm{Im}(g) = I$) l'ensemble $[g_l(\gamma), g_r(\gamma)]$ est inclus dans $\mathrm{Im}(g)$, ce qui n'est possible que si $g_l(\gamma) = g_r(\gamma)$. On a donc $g_l(\gamma) = g(\gamma) = g_r(\gamma)$, ce qui prouve que g est continue en γ. Un raisonnement analogue prouve que g est continue en α si $\alpha \in J$ (on considère alors la limite à droite de g en α et on montre qu'elle est égale à a) et que g est continue en β si $\beta \in J$ (on considère alors la limite à gauche de g en β et on montre qu'elle est égale à b). Ceci termine la démonstration de ce théorème.

■

2.5 Exercices

Exercice 2.1 (Fonction continue, non nulle en un point)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 2.2 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f\ : \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice 2.3

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 2.4 (Fonctions monotones)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 2.5 (Polynôme de degré impair)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 2.6 (Existence d'un maximum)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 2.7 (Injectivité et continuité donne monotonie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 2.8 (Prolongement par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. Calculer $\lim_{x\to -1} f(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x)$.

3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 2.9

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 2.10 (Valeur intermédiaire)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Soit $t \in [0, 1]$, montrer que $\varphi(t) \in [0, 1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est continue.

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Exercice 2.11 (Fonction dont l'image est discrète)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout point de $\mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 2.12 (Continuité de "max" et "min")

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f\top g$ et $f\perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

   $$(f\top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f\perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

   Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f\top g$ et $f\perp g$ sont continues en a.

Exercice 2.13 (Convexe implique continue)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]

2. Soit $x \in] - 1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.

3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.14 (Borne supérieure atteinte)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$). On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Monter que $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré est qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f(a) = \sup\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 2.15 (Exercice sur les valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \le 0$ et $g(x_1) \ge 0$.
3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Exercice 2.16 (Prolongement par continuité)

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 2.17 (Point fixe)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1],\ |x_1 - x_2| \le |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2.18 (Equation fonctionnelle)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in R_+,\ f(x + y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que f est à valeurs positives ou nulles.
2. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.

3. Calculer $f(0)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et p, q deux entiers naturels strictement positifs. On pose $r = \frac{p}{q}$,En calculant $f(q(rx))$ de deux manières différentes, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r.
6. *Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.*
   (a) Construire une suite (x_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 et tellle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in N$.

(b) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.

7. On suppose dans cette question que f est continue à droite sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
8. On suppose que f est continue à droite en 0, montrer que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et conclure qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
9. On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.
   (a) Montrer que sur $[0, B - A]$, f est minorée de borne inférieure strictement positive.
   (b) Montrer que f est continue à droite de 0.
   (c) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2.6 Exercices corrigés

Exercice 2.19 (Corrigé de l'exercice 2.1)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

corrigé

On pose $\delta = |f(a)|$. Comme $\delta > 0$ et que f est continue en a, il existe $\gamma > 0$ t.q. :

$$x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \gamma \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow f(a) - \frac{\delta}{2} \leq f(x) \leq f(a) + \frac{\delta}{2}.$$

Si $f(a) > 0$, on a donc $f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0$, pour tout $x \in]a - \gamma, a + \gamma[$.
Si $f(a) < 0$, on a $f(x) \leq \frac{f(a)}{2} < 0$, pour tout $x \in]a - \gamma, a + \gamma[$.
Dans les deux cas ($f(a) > 0$ et $f(a) < 0$) on a donc :

$$x \in]a - \gamma, a + \gamma[\Rightarrow f(x) \neq 0.$$

ce qui repond à la question car $]a - \gamma, a + \gamma[$ est un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 2.20 (Corrigé de l'exercice 2.2)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}$. On a donc $\eta > 0$ et :

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k\eta = \frac{k\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (et donc, en particulier, continue en tout point de $\mathbb{R}$).

Exercice 2.21 (Corrigé de l'exercice 2.3)

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

corrigé

La fonction f est continue en tout point différent de 2 (car c'est le quotient de deux fonctions continues et le dénominateur en non nul).

le seul problème est donc la continuité en 2. On remarque que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$ et donc, pour $x \neq 2$, $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = x^2 + 2x + 4$. Ceci permet de montrer que $\lim_{x\to 2} f(x) = 12$ et donc que f est continue en 2 si seulement si $\alpha = 12$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 12$.

Exercice 2.22 (Corrigé de l'exercice 2.5)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

corrigé

Soit p un polynôme de degré impair et $n \in \mathbb{N}^\star$ le degré de ce polynôme. Il existe donc $a \neq 0$ et q polynôme de degré au plus égal à $n-1$ t.q.

$$p(x) = ax^n + q(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et donc

$$p(x) = x^n(a + \frac{q(x)}{x^n}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^\star.$$

Comme q est de degré strictement inférieur à n, on a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^n} = 0$. Comme n est impair, on a donc :

$$\text{Si } a > 0, \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

$$\text{Si } a < 0, \lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty.$$

Dans les deux cas ($a > 0$ et $a < 0$) on a donc $\lim_{x\to+\infty} p(x)p(-x) = -\infty$. On en déduit, en particulier, qu'il existe $a > 0$ t.q. $p(a)p(-a) < 0$. Ceci montre que 0 est entre $p(a)$ et $p(-a)$. Comme p est une fonction continue sur $[-a, a]$, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) permet d'affirmer qu'il existe $c \in [-a, a]$ t.q. $p(c) = 0$. Donc, le polynôme p s'annule en au moins un point.

Exercice 2.23 (Corrigé de l'exercice 2.6)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

corrigé

On pose $\varepsilon = f(0)$. Comme $f(0) > 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, il existe $A \geq 0$ t.q. :

$$x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

On remarque maintenant que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0, A]$. Comme cet intervalle est fermé borné, on en déduit (théorème 2.3) que f est bornée sur $[0, A]$ et atteint ses bornes. Il existe donc $a \in [0, A]$ t.q. :

$$x \in [0, A] \Rightarrow f(x) \le f(a).$$

Comme $0 \in [0, A]$, on a, en particulier $\varepsilon = f(0) \le f(a)$. Avec (2.1), ceci donne $f(x) \le \varepsilon \le f(a)$ pour tout $x \ge A$. On a donc, finalement :

$$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow f(x) \le f(a).$$

Exercice 2.24 (Corrigé de l'exercice 2.7)
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f $[a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

corrigé

On a $f(a) \neq f(b)$ (car f est injective et $a \neq b$). On suppose que $f(a) < f(b)$ et on va montrer que f est strictement croissante (si $f(a) > f(b)$, un raisonnement analogue donnerait que f est strictement décroissante).

On montre tout d'abord que f prend ses valeurs dans l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Pour cela on raisonne par l'absurde. Soit $x \in]a, b[$. Si $f(x) \ge f(b)$, on a alors $f(b) \in [f(a), f(x)]$. Le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) appliqué à l'intervalle $[a, x]$ donne alors l'existence de $c \in [a, x]$ t.q. $f(c) = f(b)$. Ce qui impossible car f est injective. On a donc $f(x) < f(b)$. Un raisonnement analogue permet de montrer que $f(x) > f(a)$.

On montre maintenant que f est strictement croissante. Soit $a \le x < y \le b$. On sait déjà que $f(a) \le f(x) \le f(b)$ et $f(a) \le f(y) \le f(b)$. Pour montrer que $f(x) < f(y)$, on raisonne encore par l'absurde. Si $f(x) \ge f(y)$, on a $f(x) \in [f(y), f(b)]$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'intervalle $[y, b]$ donne alors l'existence de $d \in [y, b]$ t.q. $f(d) = f(x)$. Comme $x < y$ on a $d \neq x$ et ceci est impossible car f est injective. On a donc $f(x) < f(y)$. On a bien montré que f est strictement croissante.

Exercice 2.25 (Corrigé de l'exercice 2.8)
Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

   corrigé

   Oui ! La fonction f est continue en 0 car c'est le quotient de deux fonctions continues en 0 et que la fonction au dénominateur ne s'annule pas en 0.

   ---

2. Calculer $\lim_{x\to -1} f(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x)$.

   corrigé

   On remarque que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

   Pour $x \ge 0$, $x \neq 1$, on a donc $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-x} = (x+1)(2-x)$. On en déduit que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

   Pour $x \le 0$, $x \neq -1$, on a $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{1+x} = (x-1)(x-2)$. On en déduit que $\lim_{x\to -1} f(x) = 6$.

   ---

3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

corrigé

Oui, une telle fonction g existe. Pour $x \geq 0$, on a $g(x) = (x+1)(2-x)$ et pour $x < 0$, on a $g(x) = (x-1)(x-2)$.

Exercice 2.26 (Corrigé de l'exercice 2.9)

Soit f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \exists x \in [0,1], \ f(x) = \lambda g(x).$$

corrigé

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On définit la fonction h de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

La fonction h est continue sur $[0,1]$ (car f et g sont continues sur $[0,1]$). Comme $h(0) = f(0) - \lambda g(0) = -\lambda \leq 0$ et $h(1) = f(1) - \lambda g(1) = f(1) = 1 \geq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne qu'il existe $x \in [0,1]$ t.q. $h(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = \lambda g(x)$. (Bien sûr, le point x trouvé dépend, en général, de λ.)

Exercice 2.27 (Corrigé de l'exercice 2.10)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble $\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

corrigé

Soit $t \in [0,1]$. La fonction f est continue sur $[0,t]$ et $\frac{f(0)+f(t)}{2}$ est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(t)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2), il existe donc $s \in [0,t]$ (et donc $s \in [0,1]$) t.q. $f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$. Ceci prouve que l'ensemble $\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

Pout $t \in [0,1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Soit $t \in [0,1]$, montrer que $\varphi(t) \in [0,1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.

corrigé

On pose $A_t = \{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$. L'ensemble A_t est non vide (d'après la 1ere question) et minoré par 0. Il admet donc un borne inférieure, notée $\varphi(t)$, et $0 \leq \varphi(t)$. D'autre part, comme $A_t \subset [0,1]$, on a aussi $\varphi(t) \leq 1$.

Pour montrer que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$, on rappelle qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_t$ t.q. :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf A_t = \varphi(t).$$

Comme $a_n \in A_t$, on a $f(a_n) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$. En passant à limte sur cette égalité, la continuité de f en $\varphi(t)$ donne $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.

---

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

corrigé

La fonction f étant strictement croissante, elle est bijective de $[0,1]$ dans son image. Comme elle est continue, son image est un intervalle (théorème 2.4) et sa fonction réciproque, notée g, est également continue (théorème 2.5). On a donc :

$$\varphi(t) = g\left(\frac{f(0)+f(t)}{2}\right) \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ceci prouve que φ est continue car composée de fonctions continues.

---

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

corrigé

On prend $f(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(t) = t - \frac{1}{2}$ pour $t \in]\frac{1}{2}, 1]$. La fonction f est bien continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et on remarque que $\varphi(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et que $\varphi(t) > \frac{1}{2}$ pour $t > \frac{1}{2}$. On en déduit que φ n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

Exercice 2.28 (Corrigé de l'exercice 2.11)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout point de $\mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \in \{0,1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que f n'est pas constante. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et b et que (par exemple) $\frac{1}{2}$ est une valeur intermédiaire entre 0 et 1, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne l'existence de c (entre a et b) t.q. $f(c) = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible car $f(c) = 0$ ou 1.

Exercice 2.29 (Corrigé de l'exercice 2.12)

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ et $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \geq y$, on a alors $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x = \max\{x,y\}$. On a aussi $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y = \min\{x,y\}$.

Si $x < y$, on est ramené au cas précédent en remarquant que $\max\{x,y\} = \max\{y,x\}$ et $\min\{x,y\} = \min\{y,x\}$ et $|x-y| = |y-x|$.

---

2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \ (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

corrigé

On note φ l'application (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $s \mapsto |s|$. L'application φ est continue. La question 1 nous donne $f \top g = \frac{1}{2}(f+g+\varphi \circ (f-g))$ et $f \perp g = \frac{1}{2}(f+g-\varphi \circ (f-g))$. Comme les fonctions f et

g sont continues en a, la fonction $\varphi \circ (f-g)$ est continue en a (par composition et différence de fonctions continues). On en déduit que $f\top g$ et $f\bot g$ sont continues en a.

Exercice 2.30 (Corrigé de l'exercice 2.13)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1)-f(0)$, $\beta = f(0)-f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x)-f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1+(1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx+(1-t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]

corrigé

Comme $x = t1+(1-t)0$, avec $t = x \in]0,1[$, la convexité de f donne :

$$f(x) \leq tf(1)+(1-t)f(0) = f(0)+t(f(1)-f(0))$$

et donc :

$$f(x)-f(0) \leq \alpha x.$$

On prend maintenant $t = \frac{1}{1+x}$, on a bien $tx+(1-t)(-1) = t(x+1)-1 = 0$. Comme $\frac{1}{1+x} \in]0,1[$, la convexité de f donne $f(0) \leq tf(x)+(1-t)f(-1)$ et donc :

$$tf(0)+(1-t)f(0)) \leq tf(x)+(1-t)f(-1).$$

On en déduit :

$$t(f(0)-f(x)) \leq (1-t)(f(-1)-f(0)) = -\beta(1-t).$$

Comme $(1-t) = \frac{x}{1+x} = tx$, on en déduit bien $f(0)-f(x) \leq -\beta x$ c'est-à-dire :

$$\beta x \leq f(x)-f(0).$$

---

2. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $|f(x)-f(0)| \leq \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.

corrigé

Soit $x \in]0,1[$, la question 1 donne $|f(x)-f(0)| \leq \max\{\alpha x, -\beta x\} \leq \gamma x = \gamma|x|$.

On suppose maintenant que $x \in]-1,0[$. On raisonne de manière analogue à la question 1. On remarque d'abord que $x = t(-1)+(1-t)0$, avec $t = -x \in]0,1[$. la convexité de f donne donc $f(x) \leq tf(-1)+(1-t)f(0) = f(0)-x(f(-1)-f(0))$ et donc :

$$f(x)-f(0) \leq \beta x.$$

Avec $t = \frac{1}{1-x}$, on a $0 = tx+(1-t)(1)$. Comme $\frac{1}{1-x} \in]0,1[$, la convexité de f donne $f(0) \leq tf(x)+(1-t)f(1)$, on en déduit $t(f(0)-f(x)) \leq (1-t)(f(1)-f(0)) = (1-t)\alpha$. Enfin, comme $1-t = \frac{-x}{1-x} = -xt$, on obtient :

$$f(0)-f(x) \leq -\alpha x.$$

On a finalement $\alpha x \leq f(x)-f(0) \leq \beta x$ et on conclut, comme pour le cas $x \in]0,1[$, $|f(x)-f(0)| \leq \max\{\beta x, -\alpha x\} \leq \gamma|x|$.

Comme le cas $x = 0$ est trivial, on a bien démontré

$$|f(x) - f(0)| \leq \gamma|x| \text{ pour tout } x \in]-1, 1[. \tag{2.2}$$

De (2.2), on déduit facilement que f est continue en 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, On prend $\eta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{\gamma+1}\} > 0$, l'inégalité (2.2) donne alors :

$$|x - 0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve bien la continuité de f en 0.

---

3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + a)$. La fonction f est continue en a si (et seulement si) la fonction g est continue en 0. Pour montrer que g est continue en 0 (et donc que f est continue en a), il suffit de remarquer que g est convexe et d'appliquer la question précédente (à la fonction g au lieu de f). Il reste donc à montrer que g est convexe.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on a $g(tx+(1-t)y) = f(tx+(1-t)y+a) = f(t(x+a)+(1-t)(y+a)) \leq tf(x + a) + (1 - t)f(y + a) = tg(x) + (1 - t)g(y)$. Ceci prouve donc que g est convexe.

On a ainsi montré que f est continue en a.

Exercice 2.31 (Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI))

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]

corrigé

La fonction g est continue sur $[0, 1]$. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0, 1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0, 1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_2 t.q. $g(x_2) = 0$, c'est-à-dire $f(x_2) = (x_2)^2$.

---

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

corrigé

Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$. La fonction h_n est continue sur $[0, 1]$ et on a, comme à la question précédente, $h_n(0) = f(0) \geq 0$ et $h_n(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_n t.q. $h_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire $f(x_n) = (x_n)^n$.

---

3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \to +\infty$?

corrigé

La fonction $x \mapsto -x^n$ est aussi strictement décroissante sur $[0,1]$. La fonction h_n est donc strictement décroissante comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. L'existence de $x_n \in [0,1]$ t.q. $h_n(x_n) = 0$ est donnée par la question précédente. L'unicité de x_n vient de la strict décroissance de h_n car si $x_n \in [0,1]$ est t.q. $h_n(x_n) = 0$, on a, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{x_n\}$, $h_n(x) > 0$ si $x < x_n$ et $h_n(x) < 0$ si $x > x_n$, et donc $h_n(x) \neq 0$. Le point x_n est donc le seul élément de $[0,1]$ pour lequel h_n s'annule.

Comme f est strictement décroissante, on $f(1) < f(0)$. Puis, comme $f(0), f(1) \in [0,1]$, on a donc $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. On en déduit $x_n \neq 0$ (car $h_n(0) = f(0) > 0$) et $x_n \neq 1$ (car $h_n(1) = f(1) - 1 < 0$). Ce qui montre que $0 < x_n < 1$. On a donc $h_{n+1}(x_n) = f(x_n) - (x_n)^{n+1} = h_n(x_n) + (x_n)^n - (x_n)^{n+1} = (x_n)^n(1 - x_n) > 0$. Comme $h_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < h_{n+1}(x_n)$ et que h_{n+1} est strictement décroissante, on a nécessairement $x_{n+1} > x_n$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante majorée (par 1), elle est donc convergente. On note a la limite de cette suite. Comme $0 < x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $a \in [0,1]$. On remarque maintenant que $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ (car f est continue en a). Si $a \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = 0$ et donc $f(a) = 0$, ce qui est impossible car la décroissance strict de f donne $f(a) > f(1) \geq 0$. On a donc nécessairement $a = 1$ (et donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$). Enfin, on a $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(1)$.

Exercice 2.32 (Borne supérieure d'une fonction)

On définit la fonction f de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{x}\cos(x)$ pour $x \in]0,\infty[$. On pose $A = \{f(x),\ x \in]0,\infty[\}$.

1. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.

   corrigé

   $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   ---

2. Montrer que la fonction f n'est pas minorée (i.e. la partie A n'est pas minorée).

   corrigé

   La fonction f n'est pas minorée car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   ---

3. (a) Montrer qu'il existe $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, t.q., pour tout $x \in]0,\infty[$, $f(x) \leq \sup B$ avec $B = \{f(y);\ y \in [\alpha,\beta]\}$.

   corrigé

   On prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$. La fonction f est continue sur $[\alpha,\beta]$ qui est un intervalle fermé borné. La fonction f est donc bornée sur $[\alpha,\beta]$ et atteint ses bornes. il existe donc $c \in [\alpha,\beta]$ t.q. $f(c) = \sup B$ (et donc, pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $f(c) \geq f(x)$).

   On a, en particulier, $f(c) \geq f(\beta) = f(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
   Pour $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $f(x) \leq 0 < \frac{1}{\pi} \leq f(c)$.
   Pour $x > \pi$, on a $f(x) \leq |f(x)| \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{\pi} \leq f(c)$.

On a donc bien, pour tout $x \in]0, \infty[$, $f(x) \le f(c) = \sup B$ (ce qui donne $\sup A = \sup B$).

(b) En déduire que la fonction f est majorée (i.e. la partie A est majorée) et que la borne supérieure de f est atteinte.

corrigé

La démonstration précédente donne que $f(c) = \sup A$. La fonction f est donc majorée (i.e. la partie A est majorée) et la borne supérieure de f est atteinte.

Soit $a \in]0, \infty[$ t.q. $f(a) = \sup A$ (c'est-à-dire $f(a) \ge f(x)$ pour tout $x \in]0, \infty[$).

4. Montrer que $f(a) > 0$ et que $a < 2\pi$.

corrigé

On a, en particulier, $f(a) \ge f(\pi) = \frac{1}{\pi} > 0$.

La démonstration de la question 3(a) donne que $a \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ (car $f(x) < \sup B$ si $x \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $f(a) = \sup B$). On a donc $a \le \pi < 2\pi$. Mais on peut aussi démontrer que $a < 2\pi$ en utilisant la périodicité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$. En effet, on remarque que d'abord que $f(2\pi) < 0$, donc $a \ne 2\pi$. Puis, si $a > 2\pi$, on a $f(a - 2\pi) = \frac{-\cos(a)}{a-2\pi} > \frac{-\cos(a)}{a}$ car $\cos(a) > 0$. On en déduit $f(a - 2\pi) > f(a)$, en contradiction avec la définition de a. On a donc bien montré que $a < 2\pi$.

---

5. Montrer que $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ et que $f'(a) = 0$.

corrigé

On sait déjà que $a \in]0, 2\pi[$. Comme $f(a) > 0$ et que $f(x) \le 0$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, on en déduit que $a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Le fait que $f'(a) = 0$ a été vu en cours (il suffit de remarquer que $f(a + h) - f(a) \le 0$ pour tout $h \ne 0$ t.q. $a + h > 0$ et d'utiliser la définition de $f'(a)$).

---

6. Pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on pose $g(x) = x\sin(x) + \cos(x)$. Montrer qu'il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$. Montrer que $b \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Montrer que $a = b$ et en déduire que f atteint son maximum en un unique point.

corrigé

Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a $g'(x) = x\cos(x) < 0$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante (ceci a été vu en cours) sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Comme $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ et $g(\frac{3\pi}{2}) < 0$, il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$ (l'existence de b découle du théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité de b découle de la stricte décroissance de g).

Comme $g(\pi) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué avec l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$) permet de dire que cet unique b appartient à l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et comme l'on sait que $a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $f'(a) = 0$, on a nécessairement $a = b$. Ceci prouve que b est l'unique point de $]0, \infty[$ pour lequel f atteint son maximum.

Exercice 2.33 (Valeur intermédiaire)

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $f(0) < 0$ et $\lim\limits_{x\to\alpha, x<\alpha} f(x) = +\infty$.
Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]

corrigé

Pour $x \in [0, \alpha[$, on pose $\varphi(x) = f(x)(x - \beta) - g(x)$. La fonction φ est donc continue sur $[0, \alpha[$.

Cas $\beta < \alpha$**.** Dans ce cas, la fonction φ est continue sur $[0, \beta]$. On remarque que $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(\beta) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in]0, \beta[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

Cas $\beta > \alpha$**.** Dans ce cas, on a $\lim_{x\to\alpha, x<\alpha} \varphi(x) = -\infty$. Il existe donc, par exemple, $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[, \ x \geq \alpha - \eta \ \Rightarrow \ \varphi(x) < 0.$$

On en déduit l'existence de $\gamma \in]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(\gamma) < 0$. Comme $\varphi(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in]0, \gamma[\subset]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

Cas $\beta = \alpha$**.** On modifie légèrement le raisonnement précédent. Comme $\lim_{x\to\alpha, x<\alpha} f(x) = +\infty$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[, \ x \geq \alpha - \eta \ \Rightarrow \ f(x) > 0.$$

Comme $x - \beta < 0$ si $x < \alpha = \beta$, on a donc

$$x \in [0, \alpha[, \ x \geq \alpha - \eta \ \Rightarrow \ \varphi(x) < 0.$$

On conclut alors comme dans le cas précédent.

Exercice 2.34

Soit f une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer que f garde un signe constant sur I.

corrigé

On raisonne par contraposée. Si f ne garde pas un signe constant sur l'intervalle I (qui n'est pas nécessairement fermé ni borné), cela signifie qu'il existe $a, b \in I$ t.q. $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Comme 0 est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe donc x entre a et b t.q. $f(x) = 0$. Comme I est un intervalle contenant a et b, il contient aussi x. Donc, f s'annule sur I.

On a bien ainsi montré que si f ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors f est de signe constant sur I.

Exercice 2.35

Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

corrigé

On pose $f(x) = x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$. Le polynôme f est une fonction continue sur $[0, 1]$. On remarque que $f(0) = -7$ et $f(1) = 1$. Comme 0 est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(1)$, il existe donc $x \in]0, 1[$ t.q. $f(x) = 0$.

Exercice 2.36

Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$. En déduire que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$, avec $x \ge y$. Le plus rapide est de remarquer que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \le x + y - 2\sqrt{y}\sqrt{y}$ (car $\sqrt{y} \le \sqrt{x}$). On en déduit que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \le x - y$, c'est-à-dire $\sqrt{x} - \sqrt{y} \le \sqrt{x-y}$. Le cas $y \ge x$ est similaire. On a donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\alpha = \varepsilon^2$. On obtient ainsi :

$$x, y \in \mathbb{R}^+,\ |x-y| \le \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|} \le \sqrt{\alpha} = \varepsilon.$$

Ceci prouve bien que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$, on raisonne par l'absurde. On suppose donc que f est uniformément continue sur $]0,1]$. Il existe alors (en particulier) $\alpha > 0$ t.q. :

$$x, y \in]0,1],\ |x-y| \le \alpha \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \le 1. \tag{2.3}$$

On prend alors $\beta = \min\{\frac{1}{4}, \alpha\}$, $x = 2\beta$ et $y = \beta$. On a bien $x, y \in]0,1]$ et $|x-y| = \beta \le \alpha$. Pourtant, on a $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{\beta}{2\beta^2} = \frac{1}{2\beta} \ge 2 > 1$, en contradiction avec (2.3). Ce qui prouve que f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Exercice 2.37

soit f l'application de $[-1, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x2+2x+2}}$, pour tout $x \ge -1$. Montrer que f est bijective de $[-1, \infty[$ dans $]0,1]$ et donner ue formule explicite pour sa fonction réciproque.

corrigé

La fonction $h\ :\ x \mapsto (x^2 + 2x + 2)$ est continue et strictement croissante sur $[-1, \infty[$ (car sa dérivée est strictement positive sur $]-1, \infty[$). Comme $h(-1) = 1$, elle est aussi strictement positive. On en déduit que la fonction f (définie par $f = 1/\sqrt{h}$) est bien définie, continue et strictement décroissante sur $[-1, \infty[$. Le théorème 2.5 (appliqué à la fonction $-f$ pour se ramener au cas d'une fonction strictement croissante) donne alors qu'elle est bijective de $[-1, \infty[$ sur son image et que cette image est l'intervalle $]0,1]$ car $f(-1) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. La fonction réciproque de f, notée g, est donc une fonction continue strictement décroissante de $]0,1]$ dans $[-1, \infty[$.

Soit $y \in]0,1]$. On calcule maintenant explictement $g(y)$. On pose $x = g(y)$ de sorte que $x \in [-1, \infty[$ et $y = f(x)$. On a donc $x^2 + 2x + 2 = \frac{1}{y^2}$. Ceci donne $(x+1)^2 = \frac{1}{y^2} - 1$. Comme $x \in [-1, \infty[$, on a $x + 1 \ge 0$ et donc $x + 1 = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$, c'est-à-dire :

$$x = -1 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$
