Chapitre 4

Formules de Taylor et développements limités

4.1 Taylor-Lagrange

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{Int}(a, b)$ l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et b, c'est-à-dire $\mathrm{Int}(a, b) =]a, b[$ si $a \leq b$ et $\mathrm{Int}(a, b) =]b, a[$ si $b < a$.

Théorème 4.1 (Taylor-Lagrange) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f de classe C^n et que $f^{(n)}$ dérivable. Soit $a, b \in]\alpha, \beta[$. Alors, il existe $c \in \mathrm{Int}(a, b)$ t.q.*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.1}$$

On rappelle que, par convention, $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0! = 1$.
Démonstration : La démonstration de ce théorème consiste à appliquer le théorème des accroissements finis (ou, plus simplement, le théorème 3.1) à une fonction convenablement choisie.
On pose

$$d = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right),$$

de sorte que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} d$. Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe $c \in \mathrm{Int}(a, b)$ t.q. $d = f^{(n+1)}(c)$.
Pour $x \in]\alpha, \beta[$, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} d.$$

On remarque que $\varphi(a) = f(b)$ (grâce au choix de d) et $\varphi(b) = f(b)$. La fonction φ est dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et on a, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$\varphi'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} d$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} d = \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - d).$$

On utilise maintenant le théorème 3.1 (théorème de Rolle). La fonction φ est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et b et dérivable sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et b (c'est-à-dire sur l'intervalle $\mathrm{Int}(a, b)$). Comme $\varphi(a) = \varphi(b)$, Il existe donc $c \in \mathrm{Int}(a, b)$ t.q. $\varphi'(c) = 0$, ce qui donne (comme $b - c \neq 0$)

$$d = f^{(n+1)}(c).$$

On en déduit bien $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. ■

4.2 Taylor-Young

Notation : Lorque l'on dit qu'une propriété est vraie "au voisinage" de a ou encore "pour x suffisamment proche de a", cela signifie qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. pour tout $x \in [a - \gamma, a + \gamma]$ la propriété est vraie.

Théorème 4.2 (Taylor-Young) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f de classe C^n. Soit $a \in]\alpha, \beta[$. Alors, on a :*

1. *Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n h(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to a} h(x) = 0 \tag{4.2}$$

(et donc h continue en a, si on ajoute $h(a) = 0$). On dit que h est un "petit o" de $(x - a)$ et on note $h(x) = o(x - a)$.

2. *Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n H(x),$$

avec H bornée au voisinage de a (c'est-à-dire qu'il existe $\gamma > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|x - a| \leq \gamma \Rightarrow |H(x)| \leq M$). On dit que H est un "grand O" de $(x - a)$ et on note $H(x) = O(x - a)$.

Démonstration : On va démontrer le premier item du théorème 4.2 en appliquant le théorème 4.1 à l'ordre $n - 1$. Soit $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq a$. D'après le théorème 4.1 il existe $c_x \in \mathrm{Int}(a, x)$ t.q.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n h(x),$$

avec $h(x) = \frac{1}{n!} \left(f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n)}(a) \right)$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $f^{(n)}$ est continue en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$|y - a| \leq \alpha \Rightarrow |f^{(n)}(y) - f^{(n)}(a)| \leq \varepsilon.$$

Comme $c_x \in \text{Int}(a, x)$, on a donc aussi

$$|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)| \leq \varepsilon \Rightarrow |h(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\lim_{x\to a} h(x) = 0$.
Pour montrer le deuxième item, on remarque simplement que pour $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq a$,

$$H(x) = h(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a donc $\lim_{x\to a} H(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, on en déduit que H est ue fonction bornée au voisinage de a.

■

Remarque 4.1

1. Avec le thérorème 4.2 pour $n = 1$, on retrouve la définition de la dérivée, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)h(x),$$

   avec $\lim_{x\to a} h(x) = 0$. On remarque alors que l'hypothèse "f de classe C^1" dans le thérorème 4.2 n'est pas nécessaire (il suffit de f dérivable en a, la continuité de f' n'est pas nécessaire). Ceci est général, voir l'item suivant.

2. Le thérorème 4.2 est encore vraie sous l'hypothèse plus faible (au lieu de f de classe C^n) : f de classe C^{n-1} et $f^{(n-1)}$ dérivable en a.

Le théorème 4.2 (Taylor-Young) donne uniquement, pour a fixé, une information locale sur f (c'est-à-dire une information sur le comportement de f au voisinage de a). Le théorème 4.1 (Taylor-Lagrange) donne une information locale plus précise (car il donne une précision sur la fonction $h(x)$ de la formule de Taylor-Young), comme nous allons le voir dans l'exemple suivant. Il donne aussi une information globale sur f, même si a est fixé (voir aussi l'exemple suivant). Une troisième formule de Taylor, la formule de Taylor avec reste intégral, est encore plus précise. Elle nécessite la construction de l'intégrale, nous la verrons donc au chapitre 5.

Exemple 4.1 (Exemples d'application des formules de Taylor) Nous commençons par une application de la formule de Taylor-Young puis de celle de Taylor-Lagrange.

1. (Application de Taylor-Young, $n = 1$) Soit $0 < \alpha < 1$. La formule de Taylor-Young permet de calculer la limite de $f(x) = (x + 3)^\alpha - (x + 1)^\alpha$ quand $x \to \infty$. (Dans le cas particulier $\alpha = 1/2$, une autre démonstration possible, classique, consiste à utiliser l'astuce de la "quantité conjuguée".)

2. (Application de Taylor-Lagrange, $n = 2$) Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, et $a \in]\alpha, \beta[$. On cherche un point $a \in]\alpha, \beta[$ t.q. $f(a) = \min_{x\in]a,b[} f(x)$. Le thèorème 4.1 permet de montrer les deux résultats suivants (voir la proposition 4.6) :

   (a) (Condition Nécessaire) $f(a) = \min_{x\in]a,b[} f(x) \Rightarrow (f'(a) = 0 \text{ et } f''(a) \geq 0)$.

(b) (Condition Suffisante) ($f'(a) = 0$ et, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, $f''(x) \geq 0$) $\Rightarrow$ $f(a) = \min_{x \in]a,b[} f(x)$.

Proposition 4.1 (Condition suffisante de dérivabilité en un point) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, continue, et $a \in]\alpha, \beta[$.*

1. *On suppose que f est dérivable sur $]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$ et qu'il existe $a_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x \to a} f'(x) = a_1$. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.*
2. *On suppose que f est de classe C^∞ sur $]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*
$$\lim_{x \to a} f^{(n)}(x) = a_n.$$
Alors f est de classe C^∞ sur $]\alpha, \beta[$.

Démonstration : Cette proposition est démontrée dans l'exercice (corrigé) 3.11. ■

4.3 Fonctions analytiques (hors programme...)

Remarque 4.2 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞. Soit $a, x \in \mathbb{R}$ (fixés). D'après le théorème 4.1 (Taylor-lagrange), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in \mathrm{Int}(a, x)$ t.q. :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n).$$
On suppose (cette hypothèse est forte) qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q.
$$n \in \mathbb{N},\, y \in \mathrm{Int}(a, x) \Rightarrow |f^{(n)}(y)| \leq M. \tag{4.3}$$
On rappelle que a et x sont fixés. Sous l'hypothèse (4.3), on a alors
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \tag{4.4}$$
Pour démontrer (4.4) (avec l'hypothèse (4.3)), il suffit de remarquer que, grâce à (4.1), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } \gamma = |x - a|,$$
et d'utiliser le petit lemme 4.1 donné ci-après.

Lemme 4.1 *Soit $\gamma > 0$. Alors, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma^n}{n!} = 0$.*

Démonstration : . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{\gamma^n}{n!}$. On remarque que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\gamma}{n+1}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.
$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$
Par récurrence sur n (à partir de n_0), on a donc
$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
Ce qui prouve que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. ■

Exemple 4.2 Voici quelques exemples de fonctions f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) satisfaisant l'hypothèse (4.3) pour tout $a, x \in \mathbb{R}$ (le nombre M peut alors dépendre de a et x).

1. f est polynôme. Dans ce cas, il existe bien M (dépendant de a et x) vérifiant (4.3). Mais, pour montrer (4.4), il est plus facile de remarquer que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k > m$, où m est le degré du polynôme f. La formule (4.4) découle alors directement de la formule (4.1) en prenant $n = m + 1$.

2. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ (prendre $M = 1$),

3. $f(x) = e^x$ (prendre $M = \max(e^a, e^x)$, dans cet exemple M dépend donc de a et x).

La question suivante est alors naturelle :
Question : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞. A t-on :
pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\gamma > 0$ t.q. $|x - a| \le \gamma \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$?
Réponse : En général, la réponse est “non”. La remarque 4.2 dit que la réponse est “oui” si on a, pour tout $a, x \in \mathbb{R}$, l'hypothèse (4.3) (c'est-à-dire que pour tout $a, x \in \mathbb{R}$ il existe M vérifiant (4.3)).

Définition 4.1 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que f est analytique si :*

1. *f est de classe C^∞,*

2. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\gamma > 0$ t.q. $|x - a| \le \gamma$ implique $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.*

L'hypothèse (4.3) donnée dans la remarque 4.2 donne une condition suffisante pour que f soit analytique.

Exemple 4.3 On donne ici un exemple de fonction C^∞, non analytique.

$$f(x) = 0, \ \textbf{si } x \le 0,$$
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \ \textbf{si } x > 0.$$

Pour cette fonction, on peut montrer les deux assertions suivantes:

1. f est de classe C^∞,

2. f n'est pas analytique.

Remarque 4.3 [Analytique = développable en série entière] Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, f est analytique si et seulement si f est développable en série entière, c'est-à-dire :
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$ t.q. :

$$|x - a| \le \gamma \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n (x - a)^k.$$

Remarque 4.4 (analyse réelle versus analyse complexe)
voici une différence importante entre analyse réelle et complexe.

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f \text{ dérivable partout } \not\Rightarrow f \text{ de classe } C^\infty \not\Rightarrow f \text{ analytique.}$$

2. Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. La définition 3.1 donne une notion naturelle de dérivabilité de f. On dit que f est dérivable au point $x \in \mathbb{C}$ si φ a une limite (dans $\mathbb{C}$) en 0, avec $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$. Noter aussi que, dans $\mathbb{C}$, $|z|$ est le module de z et joue le rôle de la valeur absolue dans les définitions de limites. On peut alors définir aussi, comme dans le cas de $\mathbb{R}$, les fonctions de classe C^∞ et les fonctions analytiques. On a alors :

$$f \text{ dérivable partout } \Rightarrow f \text{ de classe } C^\infty \Rightarrow f \text{ analytique.}$$

Une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dérivable partout, s'appelle "fonction holomorphe". Comme pour le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est développable en série entière (voir la remarque 4.3 et remplaçer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.)

4.4 Développements limités

Définition 4.2 **(***DLn***)** *Soit* $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ *et* f *une application de* $]\alpha, \beta[$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $a \in]\alpha, \beta[$, *on suppose que* f *est continue en* a. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Alors,* f *admet un "DLn" (pour "Développement Limité d'ordre n) en a si il existe* $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ *t.q. (pour* $x \in]\alpha, \beta[$*) :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{4.5}$$

Autrement dit, il existe un polynôme de degré au plus n, noté P, t.q. $f(x) = P(x) + (x-a)^n\varepsilon(x)$ *(avec* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$*). Comme cette formule n'est intéressante que au voisinage de a, on écrit ce polynôme sous la forme donnée en (4.5), c'est-à-dire avec des puissances de plus en plus grandes de* $(x-a)$ *(car, pour* $k \in \mathbb{N}$ *et pour* $|x-a|$ *petit par rapport à 1,* $|x-a|^{k+1}$ *est petit par rapport à* $|x-a|^k$*).*

Remarque 4.5 Quelques remarques élémentaires sur les Développement Limités. On se place dans les hypothèses de la définition 4.2.

1. Si f admet un DLn, les a_k (de la formule (4.5)), $k = 0, \ldots, n$, sont uniques.
2. Si f est de classe C^n, f admet un DLn en a et la formule (4.5) est vraie avec $a^k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pour $k = 0, \ldots, n$.
3. On suppose ici que $n \geq 1$. Alors :
$$f \text{ admet un } DLn \text{ en } a \Rightarrow f \text{ dérivable en } a \text{ et } f'(a) = a_1 \text{ (dans la formule (4.5)).}$$
4. On suppose ici que $n \geq 2$. Alors :
$$f \text{ admet un } DLn \text{ en } a \not\Rightarrow f' \text{ définie dans un voisinage de } a,$$
et on ne peut donc pas dériver f' en a. On a bien $f'(a) = a_1$, mais on ne peut pas dire que $f''(a) = 2a_2$ (dans la formule (4.5)). Un exemple est donné dans l'exemple 4.4.
5. On définit g (de $]\alpha - a, \beta - a[$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+a)$. Alors, f admet un DLn en a si et seulement si g admet un DLn en 0 (et les coefficients du développement limité sont les mêmes).

Exemple 4.4 On donne ici un exemple pour le quatrième item de la remarque 4.5. Soit $n \geq 2$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0,\\
&f(x) = x^{n+1} \text{ si } x \in]\tfrac{1}{p+1}, \tfrac{1}{p}] \text{ avec } p \in \mathbb{N}^\star \text{ pair},\\
&f(x) = -x^{n+1} \text{ si } x \in]\tfrac{1}{p+1}, \tfrac{1}{p}] \text{ avec } p \in \mathbb{N}^\star \text{ impair},\\
&f(x) = -1 \text{ si } x > 1.
\end{aligned}$$

Pour cette application, f' n'est pas définie en $\frac{1}{p}$ pour tout $p > 1$ (car f non continue en ce point) et f admet un DLn en 0.

On peut souvent calculer un développement limité en utilisant la formule de Taylor-Young (formule (4.2)), c'est ce qui est suggéré par le deuxième item de la remarque 4.5. On donne un exemple ci après (exemple 4.5).

Exemple 4.5 Pour $x < 1$, on pose $f(x) = \frac{1}{1-x}$. La fonction f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$. On peut démontrer, par récurrence sur n que $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x < 1$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le DLn en 0 de f :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + \varepsilon(x)x^n, \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 4.2 (Opérations sur DL) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f, g deux applications de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in]\alpha, \beta[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f, g admettent des DLn en a. Alors :*

1. *$f + g$ admet un DLn en a,*
2. *fg admet un DLn en a,*
3. *Si $g(a) \neq 0$, f/g (bien définie au voisinage de a) admet un DLn en a.*

Les DLn de $f + g$, fg et f/g (si $g(a) \neq 0$) se calculent à partir des DLn de f et g.

Démonstration : Compte tenu du cinquième item de la remarque 4.5, on peut supposer $a = 0$ (ce qui simplifie les formules).
Comme f, g admettent des DLn en 0, il existent des polynômes P et Q, de degré au plus n, t.q., pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.
Le premier item de la proposition est facile, il suffit de remarquer que (pour tout $x \in]\alpha, \beta[$)

$$f(x) + g(x) = (P + Q)(x) + x^n\varepsilon_3(x),$$

avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Le polynôme $P + Q$ est de degré au plus n et $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$. On a bien montré que la fonction $f + g$ admet un DLn en 0 et on trouvé ce DLn.
Le deuxième item est à peine plus difficile. On remarque que (pour tout $x \in]\alpha, \beta[$)

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n(P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)).$$

Le polynôme PQ est de degré au plus $2n$, on peut donc l'écrire $PQ(x) = R(x) + x^{n+1}S(x)$, où R est un polynôme de degré au plus n et S est un polynôme (de degré au plus $n-1$). On obtient alors

$$fg(x) = R(x) + x^n \varepsilon_4(x),$$

avec $\varepsilon_4(x) = xS(x) + P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. On a bien $\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$. Ce qui prouve que fg admet un DLn en 0 et on aussi trouvé ce DLn (c'est-à-dire le polynôme R).

Le troisième item est plus difficile. On pose $b = g(0)$. Comme $b \neq 0$ et que g est continue en 0, il existe $\gamma > 0$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-\gamma, \gamma[$. On se limite donc maintenant à $x \in]-g, \gamma[$ et $\frac{f}{g}(x)$ est bien définie.
Pour $x \in]-\gamma, \gamma[$, on pose $h(x) = 1 - \frac{g(x)}{b}$ de sorte que $g(x) = b(1-h(x))$ et

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{b}\frac{1}{1-h(x)}.$$

Noter que $h(x) \neq 1$ car $g(x) \neq 0$ (puisque $x \in]-\gamma, \gamma[$). Comme $h(0) = 0$ (et que h est continue), le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne même que $h(x) < 1$ pour tout $x \in]-\gamma, \gamma[$.

La fonction h admet un Dln en 0. Plus précisément, en posant $T(x) = 1 - \frac{Q(x)}{b}$, la fonction T est un polynôme de degré au plus n et on a

$$h(x) = T(x) + x^n\varepsilon_5(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0. \tag{4.6}$$

Comme $h(0) = 0$, on a nécessairement (grâce à la continuité de T et h en 0) $T(0) = 0$ et donc $T(x) = xS(x)$, où S est un polynôme (de degré au plus $n-1$).
On pose maintenant $\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)}$ (de sorte que $\frac{f}{g} = \frac{f}{b}\varphi$). Pour montrer que $\frac{f}{g}$ admet un DLn en 0 (et trouver ce DLn), il suffit donc, compte tenu du deuxième item de cette proposition, de montrer que φ admet un DLn en 0 (et de trouver ce DLn). Pour obtenir le DLn de φ en 0, on utilise l'exemple 4.5 qui donne, pour tout $y < 1$,

$$\frac{1}{1-y} = 1 + \sum_{k=1}^{n} y^k + y^n\varepsilon(y), \quad \text{avec } \lim_{y\to 0}\varepsilon(y) = 0.$$

(On rappelle qu'en posant $\varepsilon(0) = 0$ on a ε continue en 0.) On a donc (pour tout $x \in]-\gamma, \gamma[$)

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(h(x))^k + (h(x))^n\varepsilon(h(x)).$$

En utilisant (4.6) et $T(x) = xS(x)$, on obtient $(h(x))^n\varepsilon(h(x)) = x^n(S(x)+x^{n-1}\varepsilon_5(x))^n\varepsilon(h(x)) = x^n\varepsilon_6(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_6(x) = 0$ (car $h(0) = \varepsilon(0) = 0$ et h et ε sont continues en 0). Ce qui donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))^k + x^n\varepsilon_6(x). \tag{4.7}$$

On remarque maintenant que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe un polynôme T_k de degré au plus n t.q. $(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))^k = T_k(x) + x^n\eta_k(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_k(x) = 0$. Ceci peut se démontrer en développant la formule $(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))^k$. On peut aussi montrer ce résultat par récurrence (finie) sur k (et on obtient aussi ainsi les polynômes T_k). C'est cette seconde méthode que nous utilisons ici.

Initialisation : Pour $k = 1$, on a $T_1 = T$ (et $\eta_1 = \varepsilon_5$).

Calcul de T_{k+1} connaissant T_k ($k \in \{1, \ldots, n-1\}$) : Comme $(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))^k = T_k(x) + x^n\eta_k(x)$, on a

$$\begin{aligned}(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))^{k+1} &= (T_k(x) + x^n\eta_k(x))(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))\\ &= T_k(x)T(x) + x^n\left(T(x)\eta_k(x) + T_k(x)\varepsilon_5(x) + x^n\eta_k(x)\varepsilon_5(x)\right).\end{aligned}$$

Le polynôme T_kT peut s'écrire $T_k(x)T(x) = T_{k+1}(x) + x^{n+1}S_k(x)$, où T_{k+1} est un polynôme de degré au plus n et S_k est un polynôme (de degré au plus $n-1$). On obtient ainsi

$$(T(x) + x^n\varepsilon_5(x))^{k+1} = T_{k+1}(x) + x^n\eta_{k+1}(x), \tag{4.8}$$

avec $\eta_{k+1}(x) = xS_k(x) + T(x)\eta_k(x) + T_k(x)\varepsilon_5(x) + x^n\eta_k(x)\varepsilon_5(x)$, et donc $\lim_{x\to 0}\eta_{k+1}(x) = 0$. Ce qui termine la récurrence.

On utilise maintenant la formule (4.8) dans (4.7) pour obtenir

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} T_k(x) + x^n\varepsilon_7(x),$$

avec $\varepsilon_7 = \varepsilon_6 + \sum_{k=1}^{n}\eta_k$, et donc $\lim_{x\to 0}\varepsilon_7(x) = 0$. Ce qui donne le DLn en 0 de φ. On en déduit ensuite (par le deuxième item de cette proposition) le DLn de $\frac{f}{g}$ en 0. ■

Proposition 4.3 (Composition de DL) *Soit f une application de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in]\alpha,\beta[$. Soit g une application de $]\gamma,\delta[$ dans $\mathbb{R}$ et $b \in]\gamma,\delta[$. On suppose que $g(b) = a$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f et g admettent des DLn, en a pour f et en b pour g. Alors $f \circ g$ admet un DLn en b et ce DLn se calcule à partir des DLn de f et g.*

Démonstration : Dans la proposition 4.2, nous avons en fait démontré cette proposition dans un cas particulier (correspondant ici à prendre $a = b = 0$ et pour f l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, définie sur $]-\infty, 1[$). Pour la démontrer dans le cas général demandée ici, on reprend essentiellement la même méthode que dans la proposition 4.2.

On commence par remarquer qu'on peut toujours se ramener au cas $a = b = 0$. En effet, Il suffit de poser $F(x) = f(x+a)$ et $G(x) = g(x+b) - g(b)$. Les DLn de f et g en a et b donnent les DLn de F et G en 0. Puis, comme $f(g(x+b)) = F(G(x))$, le DLn de $F \circ G$ en 0 donne le DLn de $f \circ g$ en b.

On suppose donc maintenant que $a = b = 0$.

Comme g est continue en 0 et $g(0) = 0 \in]\alpha,\beta[$, il existe $\omega > 0$ t.q.

$$x \in]-\omega, +\omega[\Rightarrow g(x) \in]\alpha,\beta[.$$

La fonction $f \circ g$ est donc bien définie sur l'interavelle $]-\omega,+\omega[$. On se limite dans la suite à $x \in]-\omega,+\omega[$. Comme g admet un DLn en 0, il existe un polynôme Q de degré au plus n t.q. $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ (pour tout $x \in]-\omega,+\omega[$) et $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$, c'est-à-dire ε_1 continue en 0, en posant $\varepsilon_1(0) = 0$.

Comme f admet un DLn en 0, il existe un polynôme P de degré au plus n t.q. $f(y) = P(y) + y^n\varepsilon_2(y)$ (pour tout $y \in]\alpha,\beta[$) et $\lim_{y\to 0}\varepsilon_2(y) = 0$, , c'est-à-dire ε_2 continue en 0, en posant $\varepsilon_2(0) = 0$.

On en déduit, pour tout $x \in]-\omega,+\omega[$, en prenant $y = g(x)$

$$f(g(x)) = P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_2(g(x)) = P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_3(x), \tag{4.9}$$

avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \circ g$ et donc $\varepsilon_3(0) = 0$ et ε_3 continue en 0. On rappelle aussi que

$$g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_1(x).$$

Or $Q(0) = g(0) = 0$ (car Q et g sont continues en 0). Ceci montre que Q est un polynôme qui s'annule en 0. Il existe donc un polynôme R (de degré au plus $n-1$) t.q. $Q(x) = xR(x)$. Ceci montre que

$$g(x) = x(R(x) + (x-b)^{n-1}\varepsilon_1(x)).$$

En reportant cette égalité dans (4.9) on obtient

$$f(g(x)) = P(g(x)) + x^n \varepsilon_4(x), \tag{4.10}$$

avec $\varepsilon_4(x) = (R(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x))^n \varepsilon_3(x)$. On a donc aussi ε_4 continue en 0 et $\varepsilon_4(0) = 0$. Enfin, comme P est un polynôme de degré au plus n, il existe $a_0, \ldots, a_n$ t.q.

$$P(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k y^k.$$

Comme $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_1(x)$, on a donc

$$P(g(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (Q(x) + x^n \varepsilon_1(x))^k.$$

On reprend maintenant une partie de la démonstration de la proposition 4.2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe un polynôme Q_k de degré au plus n t.q. $(Q(x)+x^n\varepsilon_1(x))^k = Q_k(x)+x^n\eta_k(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta_k(x) = 0$. On obtient alors, avec (4.10),

$$f(g(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k(x) + x^n \varepsilon_5(x),$$

$\varepsilon_5 = \varepsilon_4 + \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k$, et donc $\lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$. Ce qui donne le DLn en 0 de $f \circ g$. ■

Proposition 4.4 (*DL* de f à partir du *DL* de f') *Soit f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable. Soit $a \in]\alpha, \beta[$. On suppose que f' admet un DLn en a. Alors f admet un $DL(n+1)$ en a et le $DL(n+1)$ de f se calcule à partir du DLn de f'.*

Démonstration : Ici encore, on peut se limiter à considérer le cas $a = 0$. Comme f' admet un DLn en 0, il existe $a_0, \ldots, a_n$ t.q. (pour tout $x \in]\alpha, \beta[$)

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On "devine" alors ce que doit être le $DL(n+1)$ de f en 0. Pour le montrer, on définit la fonction φ de $]\alpha, \beta[$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

la fonction φ est dérivable sur $]\alpha, \beta[$, et $\varphi'(x) = x^n \varepsilon(x)$, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.

Pour $x \in]\alpha, \beta[$, on utilise le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) sur l'intervalle dont les bornes sont 0 et x. Il donne l'existence de $c_x \in \text{Int}(0, x)$ t.q. $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(x) = xc_x^n \varepsilon(c_x)$. Comme $|c_x| \leq |x|$, on en déduit

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} - f(0)| \leq |x|^{n+1} \varepsilon_1(x); \tag{4.11}$$

avec $\varepsilon_1(x) = \max\{|\varepsilon(y)|,\ y \in \text{Int}(0, x)\}$. Comme $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ on a aussi $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. De (4.11) on déduit alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + x^{n+1} \varepsilon_2(x),$$

avec $|\varepsilon_2(x)| \leq \varepsilon_1(x)$ et donc $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Ce qui donne le $DL(n+1)$ de f. ■

4.5 Exemples (formules de taylor, DL)

En pratique, pour trouver un développement limité on utilise souvent la formule de Taylor Young si la fonction est "simple" (et régulière) ou l'une des propositions du paragraphe 4.4 si la fonction est "compliquée". On donne maintenant quelques exemples.

Exemple 4.6 Soit P un polynôme (non nul) de degré d. Alors P est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) et le reste du DLn (c'est-à-dire le terme $(x-a)^n h(x)$ dans la formule (4.2) ou le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ dans la formule (4.1)) est nul pour $n \geq d$. (Donc, P est analytique.)

Exemple 4.7 On prend ici $f(x) = \ln(1+x)$, pour $x > -1$ (la fonction f est analytique sur $]-1, +\infty[$). On peut calculer, par exemple, son $DL2$ en 0. Comme $f'(0) = 1$ et $f''(0) = -1$, on trouve $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 4.8 On prend ici $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ (la fonction f est analytique sur $\mathbb{R}$). On remarque que $f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x)$ et $f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit, par exemple, avec la formule (4.2), le $DL4$, de f en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 4.9 On prend ici $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ (la fonction g est analytique sur $\mathbb{R}$). On remarque que $g^{(2p)}(x) = (-1)^p \cos(x)$ et $g^{(2p+1)}(x) = (-1)^{p+1} \sin(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit, par exemple, avec la formule (4.2), le $DL3$, de g en 0 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 4.10 On prend ici $h(x) = \tan x$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ (la fonction h est analytique sur $]-\pi/2, \pi/2[$). Pour trouver, par exemple, le $DL3$ en 0, on peut utiliser deux méthodes :

1. (Première méthode) Calculer $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$ et utiliser la formule (4.2),
2. (Deuxième méthode) Faire le quotient des DL de f et g.

On trouve (dans les deux cas !)

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 4.11 On prend ici $\psi(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction ψ est donc la fonction réciproque de la fonction tan, notée h dans l'exemple 4.10, on garde ici cette notation. La fonction ψ est définie sur $\mathbb{R}$ (et elle est analytique). Pour calculer, par exemple, son $DL3$ en 0, on peut commencer par utiliser la proposition 3.4 sur les fonctions réciproques, elle donne que $\psi'(h(x))h'(x) = 1$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Comme $h'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + (h(x))^2$, on obtient

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

On obtient alors le $DL3$ de ψ en 0 en calculant les valeurs en 0 de ψ et ses trois premières dérivées (avec la formule (4.12) ou avec la proposition 4.5) :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 4.5 *Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$, $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$, strictement croissante, continue, bijective. On note g la fonction réciproque de f. On suppose que f est dérivable et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors :*

1. *g dérivable de $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$f \text{ de classe } C^n \Rightarrow g \text{ de classe } C^n.$$

Donc, si f de classe C^n, g admet un DLn en tout point de $]\alpha, \beta[$. (Pour calculer le DLn de g, si on connait les dérivées de f, on trouve celles de g en dérivant la formule $g'(x)f'(g(x)) = 1$.)

Démonstration : Le premier item a été démontré dans la proposition 3.4.
On montre le deuxième item par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ a déjà été vu (théorème 2.5). On commence la récurrence à $n = 1$.

Initialisation : $n = 1$. On suppose que f est de classe C^1. On a alors g continue (théorème 2.5) et f' continue (par hypothèse). On a donc $f' \circ g$ continue et, comme $f' \circ g$ ne s'annule pas, on a aussi $1/(f' \circ g)$ continue, c'est-à-dire g' continue. La fonction g est donc de classe C^1.

Passage de n à $n + 1$: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.On suppose que

$$f \text{ de classe } C^n \Rightarrow g \text{ de classe } C^n.$$

et on veut montrer que

$$f \text{ de classe } C^{n+1} \Rightarrow g \text{ de classe } C^{n+1}.$$

On suppose donc que f est de classe C^{n+1}. On a donc f' de classe C^n. De plus, comme f est de classe C^n, l'hypothèse de récurrence donne que g est de classe C^n. Par composition, on en déduit que $f' \circ g$ est de classe C^n et donc, comme $f' \circ g$ ne s'annule pas, que $1/(f' \circ g)$ est de classe C^n. Ceci donne donc que g' est de classe C^n et donc que g est de classe C^{n+1}. Ce qui termine la récurrence. ∎

On revient sur le deuxième item de l'exemple 4.1 sur la recherche des extrémas d'une fonction.

Définition 4.3 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un minimum local en a si il existe $\gamma > 0$ t.q. :*

$$x \in \mathbb{R}, \ |x - a| \leq \gamma \Rightarrow f(a) \leq f(x).$$

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et une condition suffisante pour que f admette un minimum local en a (grâce à la formule (4.1), formule de Taylor-Lagrange).

Proposition 4.6 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose f dérivable en a. Alors, si f admet un minimum local en a on a nécessairement $f'(a) = 0$. Plus précisément, si f est de classe C^2, on a :*

1. *(Condition Nécessaire) f admet un minimum local en $a \Rightarrow f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.*
2. *(Condition Suffisante) $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en a.*

Démonstration :
Condition Nécessaire. On suppose que f est dérivable en a et que f admet un minimum local en a. Il existe donc $\alpha > 0$ t.q. $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$. Pour $0 < h < \alpha$ on a donc

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

On en déduit que $f'(a) = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.
On remarque maintenant que pour $-\alpha < h < 0$ on a

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

On en déduit que $f'(a) = \lim_{h \to 0, h < 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$. Finalement, on a bien montré que $f'(a) = 0$.
On suppose maintenant de plus que f est de classe C^2. Pour montrer que $f''(a) \geq 0$, on peut utiliser les formules de Taylor-Lagrange ou de Taylor-Young. On le fait ici avec la formule de Taylor-Young. La formule (4.2) donne, pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(a) + (x - a)^2 h(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to a} h(x) = 0.$$

Comme $f'(a) = 0$ et $f(x) \geq f(a)$, on a donc, pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$,

$$f''(a) \geq 2h(x).$$

Quand $x \to a$, on en déduit $f''(a) \geq 0$.

Condition Suffisante. Comme $f''(a) > 0$ et f'' continue en a, il existe $\alpha > 0$ t.q. $f''(y) > 0$ pour tout $y \in]a - \alpha, a + \alpha[$. On va montrer que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange (on ne peut pas conclure ici avec la formule de Taylor-Young). Soit $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$, $x \neq a$. D'aprés la formule (4.1), il existe $c_x \in \mathrm{Int}(a, x)$ t.q.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(c_x).$$

Comme $f'(a) = 0$ et $f''(c_x) > 0$ (car $c_x \in]a - \alpha, a + \alpha[$), on a donc $f(x) > f(a)$. On a bien montré que f admet un minimum local en a. ■

Les notions que nous venons d'introduire (limite, continuité, dérivée, développements limités) permettent détudier des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Plusieurs exercices sont consacrés à cette question. On rappelle maintenant la notion d'asymptote, utilisée dans plusieurs exercices. Par exemple, si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a, $b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $x \mapsto ax+b$ est l'asymptote de f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.

4.6 Equivalents

Définition 4.4 *Soit* $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, $\alpha \le a \le \beta$ *et* $D \supset]\alpha, \beta[\setminus\{a\}$. *Soit* f, g *deux applications de* D *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $f \sim g$ *en* a *(ou que* $f(x) \sim g(x)$ *en* a*) si* $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ *au voisinage de* a*, avec* $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

Sous les hypothèses de la définition 4.4, si $a \in \mathbb{R}$, la phrase "$f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ au voisinage de a" signifie qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ pour tout $x \in [a-\gamma, a+\gamma] \cap D$. Si $a = +\infty$, elle signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ pour tout $x \in [M, +\infty[$. Si $a = -\infty$, elle signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ pour tout $x \in]-\infty, M]$.

Remarque 4.6 Deux propriétés simples, sous les hypothèses de la définition 4.4.

1. $f \sim g$ en $a \Leftrightarrow g \sim f$ en a.
2. Si f (ou g) est non nulle au voisinage de a (sauf éventuellement en a), on a alors :
   $f \sim g$ en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$.

Exemple 4.12 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une application définie au voisinage de a, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. Si f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, on a alors $f(x) - f(a) \sim (x-a)f'(a)$ en a.
2. Si f de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, on a alors $f(x) - f(a) \sim \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$ en a.

Voici des applications immédiates de l'exemple 4.12 :
$\sin x \sim x$ en 0, $\cos x - 1 \sim -x^2/2$ en 0.

Proposition 4.7 (Produit d'équivalents) *Soit* $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *et* f, g, φ, ψ *quatres applications définies au voisinage de* a*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, t.q.* $f \sim g$, $\varphi \sim \psi$ *en* a*. Alors,* $f\varphi \sim g\psi$ *en* a.

DÉMONSTRATION : On suppose $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = \pm\infty$ sont laissés en exercice). Il existe $\gamma > 0$ t.q., pour tout $x \in [a-\gamma, a+\gamma]$,

$$f(x) = g(x)(1+\varepsilon_1(x)), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$\varphi(x) = \psi(x)(1+\varepsilon_2(x)), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On a alors

$$f(x)\varphi(x) = g(x)\psi(x)(1+\varepsilon_3(x)),$$

avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$. On a donc $\lim_{x\to a}\varepsilon_3(x) = 0$, ce qui prouve que $f\varphi \sim g\psi$ en a. ■

Il y a un piège avec les équivalents. Sous les hypothèses de la proposition 4.7 (on a donc $f \sim g$ et $\varphi \sim \psi$ en a) on n'a pas toujours $f + \varphi \sim g + \psi$ en a. Voici un exemple simple. On prend $a = 0$ et, pour tout $x > -1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $\varphi(x) = -\log(1+x)$, $\psi(x) = -x$. On a bien $f \sim g$ et $\varphi \sim \psi$ en 0.

Pourtant, $(f+\varphi) \not\sim (g+\psi)$ en 0. En fait, pour comprendre cette difficulté, il suffit de remaquer que $f \sim 0$ en a implique $f=0$ au voisinage de a. L'exercice 4.9 donne toutefois un cas particulier pour lequel $f \sim g$ et $\varphi \sim \psi$ en a implique $f+\varphi \sim g+\psi$ en a. Il s'agit du cas où $g=\lambda h$, $\psi = \mu h$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda + \mu \neq 0$.

Définition 4.5 ("petit o" et "grand O") *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, $\alpha \le a \le \beta$ et $D \supset]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$. Soit f, g deux applications de D dans $\mathbb{R}$*

1. *On dit que $f = o(g)$ en a si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ au voisinage de a, avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.*
2. *On dit que $f = 0(g)$ en a si il existe $C > 0$ t.q. $|f(x)| \le C|g(x)|$ au voisinage de a.*

4.7 Exercices

Exercice 4.1 (Fonction C^∞ non analytique)
On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0, \\ &f(x) = 0, \text{ si } x \le 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.
$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :
   $$\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$
   [On rappelle que $e^u \ge \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]
   (b) Montrer que $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).
5. Montrer que f n'est pas analytique.

Exercice 4.2 (DL, exemple 1)
On définit f sur $]-\infty, 1[$ par :
$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$
Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 4.3 (DL d'un polynôme...)
Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 4.4 (Utilisation des DL)

Donner la limite en 0 de f définie sur $]0,\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 4.5 (DL, exemple 2)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞. [Reprendre un exercice précédent....]
2. Calculer f' et f".
3. Montrer que f est paire, donner son tableau de variation et sa limite en $+\infty$.
4. Donner le développement limité de f en 0.

Exercice 4.6 (DL, exemple 3, fastidieux...)

On définit f sur $]0,\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{\log(1+x)}{x}}$.

1. Montrer que f admet une limite (finie) en 0, notée l. On pose dans la suite $f(0) = l$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

Exercice 4.7 (DL d'une fonction réciproque)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.

Exercice 4.8 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.
3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 4.9 (Equivalents)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0.
2. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f + g) \sim (\lambda + \mu)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.

4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.

5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f + g) \sim h$ en 0.

Exercice 4.10 (Limite en 0)

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^\star$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)),\ g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x},\ h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 4.11 ($DL3$)

Calculer le $DL3$ en 0 de f définie pour $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.
Calculer le $DL3$ en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 4.12 ($DL4$)

Donner le $DL4$ en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{2}},\ g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 4.13 (DLn)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = \tfrac{x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 0,\\ &f(0) = 1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 4.14 (Equivalents)

Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1, \infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 4.15 (Fonction indéfiniment dérivable et à support compact)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0,\ \text{si } x \leq -1,\\ &f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}},\ \text{si } -1 < x < 1,\\ &f(x) = 0,\ \text{si } x \geq 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n t.q.:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ pour tout } -1 < x < 1.$$

(On ne demande de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\lim_{x\to 1, x<1} f^{(n)}(x) = 0$.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser le résultat suivant, vu en cours et en TD : Soit $-\infty \le b < a < c \le \infty$ et g une application de $]b, c[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable pour tout $x \in]b, c[$, $x \neq a$, et que g' (définie sur $]b, c[\setminus\{a\}$) admet une limite en a, notée l. Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = l$.]

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, donner le développement limité de f, à l'ordre n, au point 1.

Exercice 4.16 (Calcul de limites)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x^2+1)^\alpha - (x^2+2)^\alpha$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas simples suivants : $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (en justifiant les calculs). [distinguer les cas $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.]

Exercice 4.17 (Dérivabilité d'un quotient, utilisation des développements limités)

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et de dérivée continue). On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, on peut donc définir $h(x)$ en posant :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. On suppose, dans cette question, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

Dans la suite de l'exercice on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to 0} h(x) = a$ et on pose $h(0) = a$.

2. Montrer que h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq 0$, donner $h'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$.
3. On suppose que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (et donc que $a = \frac{f'(0)}{g'(0)}$).
4. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = x + x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{ si } x \ge 0, \\ x - x^2, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f et g sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$. Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h n'est pas dérivable en 0.

5. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$):

$$f(x) = \ln(1 + x^2), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x(2 + \sin x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h est dérivable en 0 et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

6. On suppose maintenant que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$.
   (a) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f'(0)$, $g'(0)$, $f''(0)$ et $g''(0)$.
   (b) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
7. On ne suppose plus que $g'(0) \neq 0$ mais on suppose que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $n \geq 1$ t.q. $g^{(n)}(0) \neq 0$ et, pour tout $k < n$, $g^{(k)}(0) = 0$. (On suppose toujours que $\lim_{x\to 0} h(x) = a$.)
   (a) Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.
   (b) Montrer que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.
   (c) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f^{(n)}(0)$, $g^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(0)$ et $g^{(n+1)}(0)$.
   (d) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.18 (Développement limité curieux)
On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $u > 0$, $e^u \geq \dfrac{u^q}{q!}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer, en utilisant la question précédente, que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$. En déduire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 et donner ce développement.

Exercice 4.19 (Etude de la fonction $x \mapsto x \arctan x$)
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \arctan x,\ x \in \mathbb{R}.$$

[Montrer que f est paire. Calculer f' et f". Etudier les asymptotes.]

Exercice 4.20 (Etude d'une fonction (3))
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - \cos x$$

1. Calculer en fonction de a la limite de f en 0. En déduire que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note de nouveau f ce prolongement à $\mathbb{R}$. On note C_f le graphe de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser en fonction de a la dérivée de f en 0.
4. Donner la tangente à C_f en $(0, f(0))$ et préciser en fonction de a la position locale de C_f par rapport à cette tangente.

4.8 Exercices corrigés

Exercice 4.21 (Corrigé de l'exercice 4.1)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0,$$
$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.

corrigé

Sur $]-\infty, 0[$, f est constante et est donc de classe C^∞.

Sur $]0, +\infty[$, f est de classe C^∞ car c'est la composée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$, qui est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et de $x \mapsto e^x$, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

---

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

corrigé

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{p_0(x)}{x^0} e^{-\frac{1}{x}}$ en prenant pour p_0 le polynôme constant et égal à 1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un polynôme p_n t.q.

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

On a alors, pour $x > 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = (\frac{p_n'(x)}{x^{2n}} - 2n\frac{p_n(x)}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^2}\frac{p_n(x)}{x^{2n}})e^{-\frac{1}{x}}.$$

On en déduit que $f^{(n+1)}(x) = \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}$, avec $p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - 2nxp_n(x) + p_n(x)$. La fonction p_{n+1} est bien un polynôme (car p_n et p_n' sont des polynômes).

On a bien ainsi montré, par récurrence sur n, que $f^{(n)}$ a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme demandée.

---

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :

$$\lim_{x \to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$

   [On rappelle que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]

corrigé

On démontre tout d'abord le rappel. Soit $q \in \mathbb{N}$ et $u > 0$. La formule de Taylor-Lagrange (formule (4.1)) donne qu'il existe $c \in]0, u[$ t.q. :

$$e^u = \sum_{k=0}^{q} \frac{u^k}{k!} + \frac{u^{q+1}}{(q+1)!} e^c.$$

Comme tous les termes du membre de droite de cette égalité sont positifs, on en déduit que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$.

Pour montrer que $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$ (noter que $p \in \mathbb{Z}$) on distingue deux cas.

cas 1. On suppose $p \leq 0$. Dans ce cas, il est immédiat que $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$.

Cas 2. On suppose $p > 0$. Pour $x > 0$, on utilise alors l'inégalité $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ avec $q = p+1$ et $u = \frac{1}{x}$. On obtient $(p+1)!\, e^{\frac{1}{x}} \geq x^{-(p+1)}$ et donc :

$$0 \leq \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} \leq (p+1)!\, x, \text{ pour tout } x > 0.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$.

(b) Montrer que $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

corrigé

On a $\lim_{x\to 0, x<0} f^{(n)}(x) = 0$ (car $f^{(n)}(x) = 0$ si $x < 0$). On a aussi $\lim_{x\to 0, x>0} f^{(n)}(x) = 0$ car, pour $x > 0$ on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}},$$

et on a $\lim_{x\to 0} p_n(x) = p_n(0) \in \mathbb{R}$ et, d'après la question 3(a), $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}} = 0$.

---

4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).

corrigé

On sait déjà (question 1) que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$. Pour montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il suffit, d'après la question 2 de l'exercice 3.11, de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) en 0. Ceci a été démontré dans la question précédente. L'exercice 3.11 donne donc que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Cette question montre aussi que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Montrer que f n'est pas analytique.

corrigé

La fonction f n'est pas analytique car $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors que $f(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$. Pour tout $x > 0$, $f(x)$ est donc différent de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

Exercice 4.22 (Corrigé de l'exercice 4.8)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.

————————————————————**corrigé**————————————————————

Comme f admet un minimum local en a, il existe $\gamma > 0$ t.q. :

$$|h| \le \gamma \Rightarrow f(a+h) \ge f(a).$$

On remarque maintenant que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Or, pour $0 < h < \gamma$, on a $f(a+h) \ge f(a)$ et donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$. On en déduit, en faisant tendre h vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0.$$

De même, pour pour $-\gamma < h < 0$, on a $f(a+h) \ge f(a)$ et donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$. On en déduit, en faisant tendre h vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0.$$

Finalement, on a bien montré que $f'(a) = 0$.

——

2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.

————————————————————**corrigé**————————————————————

Comme $f''(a) > 0$ et que f'' est continue, il existe $\gamma > 0$ t.q. :

$$|x-a| \le \gamma \Rightarrow f''(x) > 0.$$

(En effet, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}f''(a)$, la continuité de f'' en a donne l'existence de $\gamma > 0$ t.q. $|x-a| \le \gamma$ implique $|f''(x) - f''(a)| \le \frac{1}{2}f''(a)$ et donc $f''(x) \ge \frac{1}{2}f''(a) > 0$.)

Soit maintenant $h \ne 0$ t.q. $|h| \le \gamma$. La formule de Taylor-Lagrange (formule (4.1)) donne l'existence de x (strictement) entre a et $a+h$ t.q. :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(x).$$

Comme $f'(a) = 0$ et $f''(x) > 0$ (car $|x-a| < |h| \le \gamma$), on a donc $f(a+h) > f(a)$. On a donc montré l'existence de $\gamma > 0$ t.q. :

$$|h| \le \gamma \Rightarrow f(a+h) \ge f(a).$$

Ceci prouve que f admet un minimum local en a.

——

3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

————————————————————**corrigé**————————————————————

On prend $a = 0$ et $f(x) = x^3$. On a bien f de classe C^2, $f'(0) = f''(0) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en 0 (car $f(x) < f(0)$ pour tout $x < 0$).

——

Exercice 4.23 (Corrigé de l'exercice 4.16)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x^2+1)^\alpha - (x^2+2)^\alpha$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas simples suivants : $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

   corrigé

   - Cas $\alpha = 2$. Dans ce cas, on a $f(x) = 2x^2+1-4x^2-4 = -2x^2-3$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   - Cas $\alpha = 1$. Dans ce cas, on a $f(x) = -1$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
   - Cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on a :
   $$f(x) = \frac{((x^2+1)^{\frac{1}{2}} - (x^2+2)^{\frac{1}{2}})((x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+2)^{\frac{1}{2}})}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+2)^{\frac{1}{2}}}.$$
   On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   ---

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (en justifiant les calculs). [distinguer les cas $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.]

   corrigé

   Pour $u > -1$, on pose $\varphi(u) = (1+u)^\alpha$. Pour $x > 0$, on a donc $f(x) = x^{2\alpha}(\varphi(\frac{1}{x^2}) - \varphi(\frac{2}{x^2}))$.

   La fonction φ est de classe C^∞ sur l'ensemble $]-1,+\infty[$ et on a $\varphi'(u) = \alpha(1+u)^{\alpha-1}$ pour tout $u > -1$. Le DL1 de φ en 0 est donc :
   $$\varphi(u) = 1 + \alpha u + u\varepsilon(u), \text{ pour tout } u > -1,$$
   avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. On a donc, pour tout $x > 0$:
   $$f(x) = x^{2\alpha}(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\alpha}{x^2} - \frac{2}{x^2}\varepsilon(\frac{2}{x^2}) = x^{2\alpha}(-\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^2}\eta(x)),$$
   avec $\eta(x) = \varepsilon(\frac{1}{x^2}) - 2\varepsilon(\frac{2}{x^2})$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 0$ (car $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$). On en déduit :
   $$f(x) = x^{2(\alpha-1)}(-\alpha + \eta(x)).$$
   Comme $\lim_{x\to+\infty}(-\alpha+\eta(x)) = -\alpha$, on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $\alpha > 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si $0 < \alpha < 1$.

Exercice 4.24 (Corrigé de l'exercice 4.17)
Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et de dérivée continue). On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, on peut donc définir $h(x)$ en posant :
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. On suppose, dans cette question, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

   corrigé

   Le $DL1$ de f en 0 est $f(x) = x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a donc, pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{1+\varepsilon(x)}{x^2}$. On en déduit bien que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

Dans la suite de l'exercice on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to 0} h(x) = a$ et on pose $h(0) = a$.

2. Montrer que h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq 0$, donner $h'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$.

———————————————**corrigé**———————————————

La fonction h est le quotient de deux fonctions de classe C^1. Comme la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\star$, la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^\star.$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^\star$. D'autre part, elle est aussi continue en 0 car $\lim_{x\to 0} h(x) = a = h(0)$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

———————————————————————————————

3. On suppose que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (et donc que $a = \frac{f'(0)}{g'(0)}$).

———————————————**corrigé**———————————————

Les $DL1$ de f et g en 0 donnent $f(x) = xf'(0)+x\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = xg'(0)+x\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$, pour $i = 1, 2$. On a donc, pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{f'(0)+\varepsilon_1(x)}{g'(0)+\varepsilon_2(x)}$. On en déduit bien que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (on vient ainsi de redémontrer un cas particulier de la règle de l'Hôpital).

———————————————————————————————

4. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = x + x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{ si } x \geq 0, \\ x - x^2, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f et g sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$. Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h n'est pas dérivable en 0.

———————————————**corrigé**———————————————

La fonction f étant un polynôme, elle est de classe C^1 (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction g est de classe C^1 (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^\star_+$ et sur $\mathbb{R}^\star_-$ (car c'est un polynôme sur $\mathbb{R}^\star_+$ et sur $\mathbb{R}^\star_-$). Pour montrer que g est dérivable en 0 on remarque que

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} 1 + x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0, x<0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x<0} 1 - x = 1.$$

On en déduit bien que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 1$. Enfin, on a g' continue en 0 car $g'(x) = 1 + 2|x|$ pour $x \neq 0$ et donc $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$. La fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$ et donc $h(0) = 1$. Pour $x \neq 0$, on a $h(x) - h(0) = h(x) - 1 = \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$. On a donc $h(x) - 1 = 0$ si $x > 0$ et $h(x) - 1 = \frac{2x}{1-x}$ si $x < 0$. On en déduit :

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{h(x) - 1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0, x<0} \frac{h(x) - 1}{x} = 2.$$

Ce qui prouve que h n'est pas dérivable en 0.

———————————————————————————————

5. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$):

$$f(x) = \ln(1+x^2), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x(2+\sin x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h est dérivable en 0 et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Le $DL1$ en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ (définie sur $]-1,+\infty[$) est $\ln(1+u) = u + u\varepsilon_1(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$. On a donc $f(x) = x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ (car $\varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(x^2)$). Ceci donne :

$$h(x) = \frac{x + x\varepsilon_2(x)}{2+\sin(x)} \text{ pour tout } x \neq 0.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ et donc $h(0) = 0$.

On remarque maintenant que $\frac{h(x)}{x} = \frac{1+\varepsilon_2(x)}{2+\sin(x)}$ et donc $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2}$. Ceci montre que h est dérivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$.

On sait déjà que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (voir la question 2). Pour montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que h' est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - g'(x)f(x)).$$

Or $g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = \frac{2x^2(2+\sin x)}{1+x^2} - (x^2 + x^2\varepsilon_2(x))(2+\sin x + x\cos x)$ et donc :

$$h'(x) = \frac{1}{(2+\sin x)^2}\left(\frac{2(2+\sin x)}{1+x^2} - (1+\varepsilon_2(x))(2+\sin x + x\cos x)\right).$$

Ce qui donne $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{1}{4}(4-2) = \frac{1}{2}$ et montre la continuité de h' en 0.

---

6. On suppose maintenant que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$.

   (a) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f'(0)$, $g'(0)$, $f''(0)$ et $g''(0)$.

   corrigé

   Pour $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}(h(x) - h(0))$. Comme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $h(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ on a donc :

$$\varphi(x) = \frac{1}{xg(x)g'(0)}\left(f(x)g'(0) - g(x)f'(0)\right) \text{ pour tout } x \neq 0.$$

   Les $DL1$ et $DL2$ en 0 de g et le $DL2$ en 0 de f donnent :

$$g(x) = xg'(0) + x\varepsilon_1(x),\ g(x) = xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + x^2\varepsilon_2(x),\ f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon_3(x),$$

   avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$, pour $i = 1,2,3$. On a donc, pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(g'(0)+\varepsilon_1(x))g'(0)}\left(\left(\frac{f''(0)}{2} + \varepsilon_3(x)\right)g'(0) - \left(\frac{g''(0)}{2} + \varepsilon_2(x)\right)f'(0)\right).$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{f''(0)g'(0)-g''(0)f'(0)}{2(g'(0))^2}$ et donc que h est dérivable en 0 et :

$$h'(0) = \frac{f''(0)g'(0) - g''(0)f'(0)}{2(g'(0))^2}.$$

(b) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Comme à la question 5, on sait déjà que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (question 2). Pour montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que h' est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - g'(x)f(x)).$$

On utilise les DL de f et g écrits en (a), et les $DL1$ en 0 de f' et g', c'est-à-dire $f'(x) = f'(0)+xf''(0)+x\varepsilon_4(x)$ et $g'(x) = g'(0)+xg''(0)+x\varepsilon_5(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$, pour $i = 4, 5$. On obtient :

$$g(x)f'(x) = (xg'(0) + \frac{x^2g''(0)}{2} + x^2\varepsilon_2(x))(f'(0) + xf''(0) + x\varepsilon_4(x))$$

et

$$g'(x)f(x) = (g'(0) + xg''(0) + x\varepsilon_5(x))(xf'(0) + \frac{x^2f''(0)}{2} + x^2\varepsilon_3(x)).$$

On en déduit :

$$g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = \frac{x^2}{2}(g'(0)f''(0) - g''(0)f'(0)) + x^2\varepsilon_6(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_6(x) = 0$. Ceci donne :

$$h'(x) = \frac{1}{(g'(0) + \varepsilon_1(x))^2}\left(\frac{g'(0)f''(0) - g''(0)f'(0)}{2} + \varepsilon_6(x)\right),$$

et donc $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{g'(0)f''(0)-g''(0)f'(0)}{2(g'(0))^2} = h'(0)$. La fonction h' est donc bien continue en 0 et on en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

---

7. On ne suppose plus que $g'(0) \neq 0$ mais on suppose que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $n \geq 1$ t.q. $g^{(n)}(0) \neq 0$ et, pour tout $k < n$, $g^{(k)}(0) = 0$. (On suppose toujours que $\lim_{x\to 0} h(x) = a$.)

(a) Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $k < n$ t.q. $f^{(k)}(0) \neq 0$. On pose alors $l = \min\{k \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{(k)}(0) \neq 0\}$. On a donc $1 \leq l < n$, $f^{(l)}(0) \neq 0$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k < l$. Le DLl en 0 de f et le DLn en 0 de g donnent :

$$f(x) = \frac{x^l}{l!}f^{(l)}(0) + x^l\eta_1(x),\ g(x) = \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + x^n\eta_2(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \eta_i(x) = 0$, pour $i = 1, 2$. On en déduit, pour $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\frac{x^l}{l!} f^{(l)}(0) + x^l \eta_1(x)}{\frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + x^n \eta_2(x)} = x^{l-n} \frac{\frac{1}{l!} f^{(l)}(0) + \eta_1(x)}{\frac{1}{n!} g^{(n)}(0) + \eta_2(x)}.$$

Comme $l < n$, $f^{(l)}(0) \neq 0$ et $g^{(n)}(0) \neq 0$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} |h(x)| = +\infty$, en contradiction avec le fait que $\lim_{x\to 0} |h(x)| = |a| \in \mathbb{R}$. On a donc bien montré, par contradiction, que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.

(b) Montrer que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.

corrigé

Les DLn de f et g en 0 donnent $g(x) = \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + x^n \eta_2(x)$ et $f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \eta_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta_i(x) = 0$, pour $i = 2, 3$. On a donc, pour $x \neq 0$:

$$h(x) = \frac{f^{(n)}(0) + n!\, \eta_3(x)}{g^{(n)}(0) + n!\, \eta_2(x)}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$ et donc que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.

(c) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f^{(n)}(0)$, $g^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(0)$ et $g^{(n+1)}(0)$.

corrigé

On reprend la méthode de la question 6(a). Pour $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}(h(x) - h(0))$. Comme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $h(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$ on a donc :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x g(x) g^{(n)}(0)} \Big(f(x) g^{(n)}(0) - g(x) f^{(n)}(0) \Big) \text{ pour tout } x \neq 0.$$

Les DLn et $DL(n+1)$ en 0 de g et le $DL(n+1)$ en 0 de f donnent :

$$g(x) = \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + x^n \eta_4(x),\ g(x) = \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) + x^{n+1} \eta_5(x),$$

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + x^{n+1} \eta_6(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \eta_i(x) = 0$, pour $i = 4, 5, 6$. On a donc, pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \eta_4(x)) g^{(n)}(0)} \Big((\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \eta_6(x)) g^{(n)}(0) - (\frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \eta_5(x)) f^{(n)}(0) \Big).$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{f^{(n+1)}(0) g^{(n)}(0) - g^{(n+1)}(0) f^{(n)}(0)}{(n+1)(g^{(n)}(0))^2}$ et donc que h est dérivable en 0 et :

$$h'(0) = \frac{f^{(n+1)}(0) g^{(n)}(0) - g^{(n+1)}(0) f^{(n)}(0)}{(n+1)(g^{(n)}(0))^2}.$$

(d) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On reprend la méthode de la question 6(b). Comme à la question 5, on sait déjà que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (question 2). Pour montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que h' est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - g'(x)f(x)).$$

On utilise les DL de f et g écrits en (c), et les DLn en 0 de f' et g', c'est-à-dire $f'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(0) + x^n\eta_7(x)$ et $g'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}g^{(n+1)}(0) + x^n\eta_8(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_i(x) = 0$, pour $i = 7, 8$. On obtient :

$$g(x)f'(x) =$$
$$(\tfrac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\eta_5(x))(\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \tfrac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(0) + x^n\eta_7(x))$$

et

$$g'(x)f(x) =$$
$$(\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(0) + \tfrac{x^n}{n!}g^{(n+1)}(0) + x^n\eta_8(x))(\tfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\eta_6(x)).$$

On en déduit, en remarquant que $\frac{1}{n!\,n!} - \frac{1}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)!}$:

$$g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = \frac{x^{2n}}{n!\,(n+1)!}(g^{(n)}(0)f^{(n+1)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0)) + x^{2n}\eta_9(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\eta_9(x) = 0$. Ceci donne (avec η_4 définie en (c)) :

$$h'(x) = \frac{1}{(g^{(n)}(0) + n!\,\eta_4(x))^2}\left(\frac{g^{(n)}(0)f^{(n+1)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0))}{n+1} + (n!)^2\eta_9(x)\right),$$

et donc $\lim_{x\to 0}h'(x) = \frac{g^{(n)}(0)f^{(n+1)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0))}{(n+1)(g^{(n)}(0))^2} = h'(0)$. La fonction h' est donc bien continue en 0 et on en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.25 (Limite en $+\infty$)

Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]

corrigé

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $y \mapsto e^y$ donne l'existence de $c \in]a, b[$ t.q. $e^b - e^a = (b-a)e^c$.

Pour tout $x > 0$, en prenant $a = \frac{1}{x+1}$ et $b = \frac{1}{x}$, il existe donc $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ t.q. :

$$f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})e^{c_x} = \frac{x^2}{x(x+1)}e^{c_x}.$$

On a $\lim_{x\to\infty} c_x = 0$ (car $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ et donc $\lim_{x\to\infty} e^{c_x} = 1$.

On a aussi $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. On en déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Exercice 4.26 (Sur le Théorème des Accroissements Finis (TAF))
Rappel (TAF) : Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe $\theta \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h). \tag{4.14}$$

1. Dans les quatre cas suivants, montrer que, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe un *unique* θ vérifiant (4.14) (les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ. Calculer θ_h (en fonction de a et h) et déterminer $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h$.

   (a) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [a,b]$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.14) (l'existence d'au moins un θ est donnée par le TAF, on veut montrer ici son unicité et on cherche la limite de θ quand $h \to 0$, $h > 0$). La relation (4.14) donne :

   $$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{(a+\theta h)^2},$$

   et donc $(a+\theta h)^2 = a(a+h)$, ce qui donne :

   $$\theta = \frac{\sqrt{a(a+h)} - a}{h}.$$

   Ceci prouve bien l'unicité de θ. En posant, pour $y > -a$, $\varphi(y) = \sqrt{a(a+y)}$, on a aussi $\theta_h = \frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h} = \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}$ et donc :

   $$\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

   ————————————————————————————————

   (b) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [a,b]$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.14). La relation (4.14) donne :

   $$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{2(a+\theta h)^{\frac{3}{2}}}.$$

   On trouve donc ici

   $$\theta = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}} - a\right].$$

   Ceci prouve bien l'unicité de θ.

   Pour trouver la limite quand h tend vers 0, avec $h > 0$, de θ_h, on peut utiliser des DL en a et la formule

   $$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{-h}{2(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.15}$$

   En effet, on a, en faisant un DL2 en a de $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ et un DL1 en a de $y \mapsto \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$:

   $$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

$$\frac{1}{(a+\bar{h})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\bar{h} + \bar{h}\varepsilon_2(\bar{h}) \text{ avec } \lim_{\bar{h}\to 0}\varepsilon_2(\bar{h}) = 0,$$

ce qui donne aussi, comme $\theta_h \in]0,1[$,

$$\frac{1}{(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0.$$

En portant ces relations dans (4.15), on obtient :

$$-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) = \frac{-h}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h)\right),$$

ce qui donne, en divisant par h^2 :

$$\frac{3}{4a^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{2} - \theta_h) = -\varepsilon_1(h) - \frac{\varepsilon_3(h)}{2},$$

et donc $\lim_{h\to 0, h>0}\theta_h = \frac{1}{2}$. Cette question était plus difficile...

(c) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = e^x$ pour $x \in [a,b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0,1[$ vérifant (4.14). La relation (4.14) donne :

$$e^a(e^h - 1) = e^{a+h} - e^a = hf'(a+\theta h) = he^{a+\theta h} = he^a e^{\theta h}.$$

On a donc $e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h}$, ce qui donne

$$\theta = \frac{1}{h}\ln(\frac{e^h-1}{h}).$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ. On utilise maintenant un DL2 de $y \mapsto e^y$ en 0 :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

et donc

$$\frac{e^h-1}{h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

Comme $\theta_h \in]0,1[$, le DL1 de $y \mapsto e^y$ en 0 donne aussi

$$e^{\theta_h h} = 1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0.$$

On a donc (comme $e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h}$) :

$$1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

d'où :

$$\theta_h - \frac{1}{2} = \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h).$$

On obtient, finalement, $\lim_{h\to 0, h>0}\theta_h = \frac{1}{2}$.

(d) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in [a, b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.14). La relation (4.14) donne :

$$(a+h)^2 + h - a^2 = hf'(a+\theta h) = 2h(a+\theta h) + h,$$

ce qui donne

$$h^2 = 2h^2\theta,$$

et donc $\theta = \frac{1}{2}$. Ceci donne l'unicité de θ et $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

---

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$ il existe $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.14) et donner un exemple de fonction f (et de valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) pour laquelle θ n'est pas unique.

corrigé

Si $h > 0$; on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, a+h]$, il donne l'existence de $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.14). Si $h < 0$, on obtient le même résultat en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a+h, a]$.

En prenant, par exemple, $f(x) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on obtient un exemple pour lequel (4.14) est vraie pour tout $\theta \in]0,1[$ (et quelquesoit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$).

(b) On suppose que $f''(a) \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$, on choisit une valeur de $\theta \in]0,1[$ pour laquelle (4.14) est vérifiée. On note θ_h cette valeur de θ. Montrer que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.]

corrigé

Soit $h \in \mathbb{R}^\star$. On appilque la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f. On obtient l'existence de $\varphi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a+\varphi_h h)}{2}h^2.$$

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f', on obtient aussi l'existence de $\psi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f'(a+\theta_h h) = f'(a) + f''(a+\psi_h\theta_h h)\theta_h h.$$

Comme $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta_h h)$, on a donc $\frac{f''(a+\varphi_h h)}{2} = f''(a+\psi_h\theta_h h)\theta_h$. Comme $f''(a) \neq 0$ et f'' continue, il existe $\eta > 0$ t.q., pour tout $y \in [a-\eta, a+\eta$, $f''(y) \neq 0$. On peut écrire, pour $h \in [-\eta, \eta]$:

$$\theta_h = \frac{f''(a+\varphi_h h)}{2f''(a+\psi_h\theta_h h)}.$$

La continuité de f'' et le fait que $f''(a) \neq 0$ permet alors d'en déduire que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

---

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable (en tout point de $\mathbb{R}$) et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (4.14) est vérifiée avec $\theta = \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$.

corrigé

Comme (4.14) est vraie avec $\theta = \frac{1}{2}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, on peut l'appliquer (si $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) avec $a - h$ et $2h$. on obtient

$$f(a - h + 2h) - f(a - h) = 2hf'(a - h + \frac{1}{2}2h),$$

ce qui donne bien $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$.

(b) Montrer que f est de classe C^∞. [On pourra, par exemple, utiliser (a) avec $h = 1$.]

corrigé

La question (a) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On déduit de cette formule, par récurrence sur n que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, comme f est continue, la formule donne bien que f' est continue, donc f est de classe C^1. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, si f est de classe C^n, la formule donne que f' est de classe C^n et donc f est de classe C^{n+1}.

On a bien montré ainsi, par récurrence, que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. c'est-à-dire que f est de classe C^∞.

(c) Montrer que $f'''(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que (4.14) est, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$. Comme f est de classe C^3, la formule de Taylor-Lagrange donne l'existence de $\varphi_h, \psi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a+\varphi_h h)}{6}h^3,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a-\psi_h h)}{6}h^3.$$

Comme $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$, on en déduit :

$$f'''(a+\varphi_h h) + f'''(a-\psi_h h) = 0.$$

En faisant tendre h vers 0, ceci donne $f'''(a) = 0$.

La formule de Taylor-Lagrange (en 0, à l'ordre 3) donne alors l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = 0$, la formule (4.14) est vérifiée pour tout $\theta \in]0,1[$.Donc, si, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (4.14) est vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$, on a nécessairement $\alpha \neq 0$.

Exercice 4.27 (Etude d'une fonction (1))
Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

———————————————**corrigé**———————————————

On montre ci dessous continuité et dérivabilité de f en 0 en faisant un $DL2$ en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f (mais, bien sûr, d'autres preuves sont possibles).

Pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x\in]-1,1[$ et $\tan x) = x+x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. Pour $u\in]-1,1[$, on a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon_2(u)=0$. On en déduit, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x)=x+x^2\varepsilon_1(x)-\frac{(x+x^2\varepsilon_1(x))^2}{2}+(x+x^2\varepsilon_1(x))^2\varepsilon_2(x+x^2\varepsilon_1(x)),$$

et donc :

$$\ln(1+\tan x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x),\ \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0.$$

Pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x=x+x^2\varepsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x)=0$, ce qui donne, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $x\neq 0$:

$$f(x)=\frac{x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x)}{x+x^2\varepsilon_4(x)}=\frac{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon_3(x)}{1+x\varepsilon_4(x)}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ et donc que f est continue (car $f(0)=1$). Puis, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $x\neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{-\frac{x}{2}+x\varepsilon_3(x)-x\varepsilon_4(x)}{x(1+x\varepsilon_4(x))}=\frac{-\frac{1}{2}+\varepsilon_3(x)-\varepsilon_4(x)}{1+x\varepsilon_4(x)}$$

On a donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$. Ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

———————————————————————————————

2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

———————————————**corrigé**———————————————

Pour avoir un $DL2$ de f en 0, il suffit de faire un $DL3$ en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f. On procède comme à la question précédente.

Pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+x^3\eta_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_1(x)=0$. Pour $u\in]-1,1[$, on a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+u^3\eta_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\eta_2(u)=0$. On en déduit, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\eta_3(x),\ \text{avec } \lim_{x\to 0}\eta_3(x)=0.$$

c'est-à-dire :

$$\ln(1+\tan x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+x^3\eta_3(x).$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_4(x) = 0$, ce qui donne, pour $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3\eta_3(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)}.$$

On utilise maintenant que, pour $u \neq 1$, $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u\eta_5(u)$, avec $\lim_{u\to 0}\eta_5(u) = 0$. On obtient, pour $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_6(x) = 0.$$

Ce qui donne :

$$f(x) = (1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x))(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_7(x) = 0.$$

On a ainsi obtenu le $DL2$ de f en 0.

---

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

———————————————**corrigé**———————————————

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$. La question précédente donne $f(x) - g(x) = \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\eta_7(x) = 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q.

$$|x| \leq \varepsilon \Rightarrow |\eta_7(x)| \leq \frac{5}{6} \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0.$$

Ceci prouve que la courbe de f est, au voisinage de 0, au dessus de celle de g (qui est sa tangente en 0).

Exercice 4.28 (Etude d'une fonction (2))

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

———————————————**corrigé**———————————————

La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ est dérivable (et même de classe C^∞) car elle le quotient de deux fonctions dérivables (et de classe C^∞) et que la fonction au dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est alors dérivable (et de classe C^∞) comme somme de fonctions dérivables (et de classe C^∞).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve $f'(x) = 3 - \frac{\sin(x)}{x^2+1} - \frac{2x\cos(x)}{(x^2+1)^2}$.

———————————————**corrigé**———————————————

2. Montrer que f est strictement croissante.

———————————————**corrigé**———————————————

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2+1} \leq 1$$

et

$$\frac{2|x\cos(x)|}{(x^2+1)^2} \leq \frac{2|x|}{(x^2+1)} \leq 1$$

car $2|x| \leq x^2+1$. On en déduit $f'(x) \geq 3-1-1 = 1 > 0$. Ce qui prouve que f est strictement croissante.

---

3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est strictement croissante, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, notée $\mathrm{Im}(f)$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, il suffit de remarquer que f est continue et que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Dans la suite, on note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc aussi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^2, elle admet donc un développement limité d'ordre 2 en 0. Pour le trouver, on remarque que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0 \text{ pour } i = 1,2.$$

On en déduit $f(x) = 1 + 3x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$.

Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

corrigé

La tangente (à la courbe de f) en 0 est $t(x) = 3x+1$. O remarque que $f(x) - t(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1} - 1 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La courbe de f est donc localement (et même globalement) en dessous de sa tangente en 0.

---

5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^∞ et f' ne s'annule pas, on en déduit que la fonction g est aussi de classe C^∞. Pour avoir le développement limité de g d'ordre 2 en 1, on calcul $g(1)$, $g'(1)$ et $g"(1)$.

Comme $f(0) = 1$, on a $g(1) = 0$. puis $f'(x)g'(f(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f'(0) = 3$, on a donc $3g'(1) = 1$ et $g'(1) = 1/3$. Enfin, on a $f"(x)g'(f(x)) + f'(x)^2 g"(f(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f"(0) = -3$, on a donc $-3g'(1) + 9g"(1) = 0$, ce qui donne $g"(1) = 1/9$.

Le développement limité d'ordre 2 en 1 de g est donc $g(x) = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{18}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$.

---

6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.

corrigé

Comme $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+1} = 0$, la fonction f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto 3x$.

---

7. montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

corrigé

La fonction g est (comme f) une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $g(x_0) = A$ et on a :

$$x \geq x_0 \;\Rightarrow\; g(x) \geq A.$$

Ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De manière analogue, on a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Pour trouver les asymptotes de g, il suffit alors de remarquer que (comme $f\circ g(x) = x$) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x) - \frac{1}{3}x) = \lim_{x\to\pm\infty}[g(x) - \frac{1}{3}f(g(x))] = \lim_{y\to\pm\infty}(y - \frac{1}{3}f(y)) = \frac{1}{3}\lim_{y\to\pm\infty}(3y - f(y)) = 0.$$

La fonction g admet donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto \frac{1}{3}x$.