

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
Examen du 6 janvier 2016

Le polycopié du cours, les notes de cours et les notes de TD sont autorisés.

L'examen contient 4 exercices. Le barème est sur 31 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20...

Exercice 1 (Une méthode directe particulière, barème 4 points).

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ (on rappelle que $\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), $C \in \mathcal{M}_{1,n}$ et $D \in \mathbb{R}$. On note $\bar{A}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) par :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

On suppose que la matrice A est inversible.

On note x_B le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax_B = B$.

1. Montrer que $\bar{A}$ est inversible si et seulement si $D - Cx_B \neq 0$.

2. On suppose maintenant que $\bar{A}$ est inversible. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

On note x_b le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax_b = b$.

Montrer que la solution de $\bar{A}x = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ est donnée par $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ avec $z = \frac{c - Cx_b}{D - Cx_B}$ et $y = x_b - zx_B$.

Exercice 2 (Convergence d'une méthode itérative, barème 9 points).

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = I - E - F$ avec

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.

2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $(\frac{I}{\omega} - E)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \sqrt{2}/2$.

Pour $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \sqrt{2}/2$, on considère (pour trouver la solution de $Ax = b$) la méthode itérative suivante :

$$(\frac{I}{\omega} - E)x^{(n+1)} = (F + \frac{1-\omega}{\omega}I)x^{(n)} + b.$$

On note $B_\omega = (\frac{I}{\omega} - E)^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega}I)$. (De sorte que $x^{(n+1)} = B_\omega x^{(n)} + (\frac{I}{\omega} - E)^{-1}b$.)

3. Calculer, en fonction de ω , les valeurs propres de B_ω .

4. Donner l'ensemble des valeurs de ω pour lesquelles la méthode est convergente (quelquesoit $x^{(0)}$).

5. Déterminer $\omega_0 \in]0, 2[$ t.q. $\rho(B_{\omega_0}) = \min\{\rho(B_\omega), \omega \in]0, 2[, \omega \neq \sqrt{2}/2\}$.

Pour cette valeur ω_0 , montrer que la méthode donne la solution exacte de $Ax = b$ après un nombre fini d'itérations (quelquesoit $x^{(0)}$).

Exercice 3 ([Sur la méthode de Newton, barème 6 points]).

On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f est croissante. Soit $N \geq 1$. On s'intéresse au système non linéaire suivant de N équations à N inconnues (notées $u_1, \dots, u_N$) :

$$\begin{aligned} (Au)_i + \alpha_i f(u_i) &= b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ u &= (u_1, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{1}$$

où $A \in M_N(\mathbb{R})$ est une matrice s.d.p., $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

On admet que (1) admet au moins une solution (ceci peut être démontré mais est difficile).

1. Montrer que (1) admet une unique solution.
2. Soit u la solution de (1). Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que la méthode de Newton pour approcher la solution de (1) converge lorsque le point de départ de la méthode, noté $u^{(0)}$, vérifie $|u - u^{(0)}| < a$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.)

Exercice 4 (Optimisation avec contraintes, barème 12 points).

Soit $n \geq 1$, J une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, convexe et de classe C^1 et K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème d'optimisation

$$u \in K, J(u) \leq J(v) \text{ pour tout } v \in K. \quad (2)$$

1. Soit $u \in K$. Montrer que u est solution de (2) si seulement si $\nabla J(u) \cdot (v - u) \geq 0$ pour tout $v \in K$.
[Pour le sens direct, on pourra remarquer que $u + t(v - u) \in K$ pour tout $v \in K$ et $t \in [0, 1]$.]
- Soit $p \geq 1$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $d \in \text{Im}(C)$. Pour la suite de l'exercice, on prend $K = \{v \in \mathbb{R}^n; Cv = d\}$.
2. Montrer que K est un ensemble convexe fermé non vide.
3. Soit $u \in K$. Montrer que u est solution de (2) si seulement si $\nabla J(u) \cdot w = 0$ pour tout $w \in \text{Ker}(C)$ (c'est-à-dire $\nabla J(u) \in (\text{Ker}(C))^\perp$).
- 4.(a) Montrer que $\text{Im}(C^t) \subset (\text{Ker}(C))^\perp$ (c'est-à-dire que $v \cdot w = 0$ pour tout $v \in \text{Im}(C^t)$ et $w \in \text{Ker}(C)$).
(b) Montrer que $\text{Im}(C^t) = (\text{Ker}(C))^\perp$.
[On rappelle que si F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$.]
5. Dédurre des deux questions précédentes que u est solution de (2) si seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\nabla J(u) + C^t \lambda = 0, \quad (3)$$

$$Cu = d. \quad (4)$$

6. On suppose maintenant que $\text{rang}(C) = p$ et que $J(v) = \frac{1}{2}Av \cdot v - b \cdot v$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que (3)-(4) est un système linéaire de $n + p$ équations à $n + p$ inconnues ayant une unique solution.