Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique et optimisation
Examen du 6 janvier 2016

Le polycopié du cours, les notes de cours et les notes de TD sont autorisés.
L'examen contient 4 exercices. Le barème est sur 31 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20...

Exercice 1 (Une méthode directe particulière, barème 4 points)**.**
Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ (on rappelle que $\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), $C \in \mathcal{M}_{1,n}$ et $D \in \mathbb{R}$. On note $\bar{A}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) par :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

On suppose que la matrice A est inversible.
On note x_B le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax_B = B$.

1. Montrer que $\bar{A}$ est inversible si et seulement si $D - Cx_B \neq 0$.

Corrigé – *Soit* $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ *avec* $y \in \mathbb{R}^n$ *et* $z \in \mathbb{R}$*. On suppose que* $\bar{A}x = 0$*, c'est-à-dire*

$$Ay + Bz = 0,\ Cy + Dz = 0.$$

Ceci est équivalent à $y = -zx_B$ *(car A est inversible) et* $z(D - Cx_B) = 0$*.*
Si $D - Cx_B \neq 0$*, on a donc* $z = 0$ *et donc* $y = 0$*. Ceci prouve que* $x = 0$ *et donc que* $\bar{A}$ *est inversible.*
Réciproquement, si $D - Cx_B = 0$*, on a* $\bar{A}x = 0$ *avec* $x = \begin{bmatrix} x_B \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0$*. Ce qui prouve que* $\bar{A}$ *n'est pas inversible.*

2. On suppose maintenant que $\bar{A}$ est inversible. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
On note x_b le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax_b = b$.
Montrer que la solution de $\bar{A}x = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ est donnée par $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ avec $z = \dfrac{c - Cx_b}{D - Cx_B}$ et $y = x_b - zx_B$.

Corrigé – $\bar{A}x = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ *donne*

$$Ay + Bz = b,\ Cy + Dz = c.$$

On a donc $y = x_b - zx_B$ *et* $C(x_b - zx_B) + Dz = c$*, ce qui donne bien* $z = \dfrac{c - Cx_b}{D - Cx_B}$*.*

Exercice 2 (Convergence d'une méthode itérative, barème 9 points)**.**
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = I - E - F$ avec

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ E = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ \text{et } F = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.

Corrigé – $\det A = -1$*, donc A est inversible*

2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $(\frac{I}{\omega} - E)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \sqrt{2}/2$.

Corrigé – $\det(\frac{I}{\omega} - E) = \frac{1}{\omega}(\frac{1}{\omega^2} - 2)$*. On en déduit bien que* $(\frac{I}{\omega} - E)$ *est inversible si et seulement si* $\omega^2 \neq 1/2$*, c'est-à-dire* $\omega \neq \sqrt{2}/2$*.*

Pour $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \sqrt{2}/2$, on considère (pour trouver la solution de $Ax = b$) la méthode itérative suivante :

$$(\frac{I}{\omega} - E)x^{(n+1)} = (F + \frac{1-\omega}{\omega}I)x^{(n)} + b.$$

On note $B_\omega = (\frac{I}{\omega} - E)^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega}I)$. (De sorte que $x^{(n+1)} = B_\omega x^{(n)} + (\frac{I}{\omega} - E)^{-1}b$.)

3. Calculer, en fonction de ω, les valeurs propres de B_ω.

Corrigé – *Soit $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \sqrt{2}/2$. Le nombre complexe λ est valeur propre de B_ω si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que $(F + \frac{1-\omega}{\omega}I)x = \lambda(\frac{I}{\omega} - E)x$, c'est-à-dire si et seulement*

$$\det((F + \frac{1-\omega}{\omega}I) - \lambda(\frac{I}{\omega} - E)) = 0.$$

Comme

$$(F + \frac{1-\omega}{\omega}I) - \lambda(\frac{I}{\omega} - E) = \begin{bmatrix} \frac{1-\omega-\lambda}{\omega} & -2\lambda & 0 \\ -\lambda & \frac{1-\omega-\lambda}{\omega} & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1-\omega-\lambda}{\omega} \end{bmatrix},$$

on a $\det((F+\frac{1-\omega}{\omega}I)-\lambda(\frac{I}{\omega}-E)) = \frac{1-\omega-\lambda}{\omega^3}((1-\omega-\lambda)^2-2\lambda^2\omega^2) = \frac{1-\omega-\lambda}{\omega^3}(1-\omega-\lambda-\sqrt{2}\lambda\omega)(1-\omega-\lambda+\sqrt{2}\lambda\omega)$.
Les valeurs propres de B_ω sont doc $(1-\omega)$, $\frac{1-\omega}{1+\sqrt{2}\omega}$ et $\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}$.

4. Donner l'ensemble des valeurs de ω pour lesquelles la méthode est convergente (quelquesoit $x^{(0)}$).

Corrigé – *Comme $0 < \omega < 2$, on a $|1-\omega| < 1$ et $|\frac{1-\omega}{1+\sqrt{2}\omega}| < 1$. La méthode est donc convergente si et seulement $|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}| < 1$.*
On distingue maintenant 3 cas.
Cas 1 *On suppose $\omega < \sqrt{2}/2$. On a alors $|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}| = \frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega} > 1$. La méthode n'est pas convergente.*
Cas 2 *On suppose $\sqrt{2}/2 < \omega \leq 1$. On a alors $|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}| = \frac{1-\omega}{\sqrt{2}\omega-1}$. La méthode est convergente si seulement si $1-\omega < \sqrt{2}\omega - 1$, c'est-à-dire si seulement si $\omega > 2/(1+\sqrt{2})$.*
Cas 3 *On suppose $1 < \omega$. On a alors $|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}| = \frac{\omega-1}{\sqrt{2}\omega-1} < 1$. La méthode est convergente.*
En résumé, la méthode est convergente pour $\omega \in]\frac{2}{1+\sqrt{2}}, 2[$.

5. Déterminer $\omega_0 \in]0,2[$ t.q. $\rho(B_{\omega_0}) = \min\{\rho(B_\omega), \omega \in]0,2[, \omega \neq \sqrt{2}/2\}$.
Pour cette valeur ω_0, montrer que la méthode donne la solution exacte de $Ax = b$ après un nombre fini d'itérations (quelquesoit $x^{(0)}$).

Corrigé – *Le calcul précédent montre que $\omega_0 = 1$ et $\rho(B_{\omega_0}) = \rho(B_1) = 0$. Comme B_1 est une matrice d'ordre 3, ceci est suffisant pour dire que $B_1^3 = 0$ et donc que $x^{(3)} = A^{-1}b$. En fait, ici, on a même $B_1^2 = 0$ et donc $x^{(2)} = A^{-1}b$.*

Exercice 3 ([Sur la méthode de Newton, barème 6 points)**.**
On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f est croissante. Soit $N \geq 1$. On s'intéresse au système non linéaire suivant de N équations à N inconnues (notées $u_1, \ldots, u_N$) :

$$\begin{aligned} &(Au)_i + \alpha_i f(u_i) = b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \\ &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{1}$$

où $A \in M_N(\mathbb{R})$ est une matrice s.d.p., $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

On admet que (1) admet au moins une solution (ceci peut être démontré mais est difficile).

1. Montrer que (1) admet une unique solution.

Corrigé – *Soit u, v deux solutions de (1). On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $(A(u-v))_i + \alpha_i(f(u_i) - f(v_i) = 0$. En multipliant cette égalité par $(u_i - v_i)$ et en sommant sur i on obtient*

$$A(u-v) \cdot (u-v) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (f(u_i) - f(v_i))(u_i - v_i) = 0.$$

Comme $A(u-v) \cdot (u-v) \geq 0$ (car A est s.d.p) et $\alpha_i(f(u_i) - f(v_i))(u_i - v_i) \geq 0$ pour tout i (car f est croissante et $\alpha_i \geq 0$), on en déduit $A(u-v) \cdot (u-v) = 0$ et donc $u = v$ (car A est s.d.p). Ceci montre que bien que (1) admet une unique solution.

2. Soit u la solution de (1). Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que la méthode de Newton pour approcher la solution de (1) converge lorsque le point de départ de la méthode, noté $u^{(0)}$, vérifie $|u - u^{(0)}| < a$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.)

Corrigé – *Le système (1) s'écrit $F(v) = 0$ où la fonction F (de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) est définie par $(F(v))_i = (Av)_i + \alpha_i f(v_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ (et tout $v \in \mathbb{R}^N$).*
Comme f est de classe C^2, la fonction F est aussi de classe C^2. Pour montrer l'existence de $\alpha > 0$, il suffit de montrer que la matrice jacobienne $DF(u)$ est inversible.
On a $DF(u) = A + C$, où C est la matrice dont les composantes sont

$$c_{i,j} = 0, \text{ si } i \neq j, \; c_{i,i} = \alpha_i f'(u_i).$$

Comme f est croissante et $\alpha_i > 0$, on a $\alpha_i f'(u_i) \geq 0$ (pour tout i) et la matrice C est donc symétrique positive. Ceci montre que $DF(u)$ est une matrice s.d.p.. Cette matrice est donc inversible. Ce qui termine la question.

Exercice 4 (Optmisation avec contraintes, barème 12 points)**.**
Soit $n \geq 1$, J une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, convexe et de classe C^1 et K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème d'optimisation

$$u \in K, \; J(u) \leq J(v) \text{ pour tout } v \in K. \tag{2}$$

1. Soit $u \in K$. Montrer que u est solution de (2) si seulement si $\nabla J(u) \cdot (v - u) \geq 0$ pour tout $v \in K$.
[Pour le sens direct, on pourra remarquer que $u + t(v - u) \in K$ pour tout $v \in K$ et $t \in [0, 1]$.]

Corrigé – *On suppose que u est solution de (2).*
Soit $v \in K$ et $t \in]0, 1]$. Comme $u + t(v-u) = tv + (1-t)u \in K$, on a $J(u) \leq J(u + t(v-u))$ et donc

$$\frac{1}{t}(J(u + t(v-u)) - J(u)) \geq 0.$$

Quand $t \to 0$, on obtient bien $\nabla J(u) \cdot (v - u) \geq 0$.

Réciproquement, on suppose que u vérifie $\nabla J(u) \cdot (v-u) \geq 0$ pour tout $v \in K$. On veut montrer que u est solution de (2).
Soit $v \in K$. Comme J est convexe, on $J(v) \geq J(u) + \nabla J(u) \cdot (v-u)$ et comme $\nabla J(u) \cdot (v-u) \geq 0$ on en déduit $J(v) \geq J(u)$.

Soit $p \geq 1$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $d \in \mathrm{Im}(C)$. Pour la suite de l'exercice, on prend $K = \{v \in \mathbb{R}^n; Cv = d\}$.

2. Montrer que K est un ensemble convexe fermé non vide.

Corrigé – *L'ensemble K est convexe car si $v, w \in K$ et $t \in [0, 1]$, on a $C(tv + (1-t)w) = tCv + (1-t)Cw = d$ et donc $tv + (1-t)w \in K$.*
L'ensemble K est fermé car c'est l'image réciproque de $\{d\}$ par l'application continue $v \mapsto Cv$.
Enfin, l'ensemble K est non vide car $d \in \mathrm{Im}(C)$.

3. Soit $u \in K$. Montrer que u est solution de (2) si seulement si $\nabla J(u) \cdot w = 0$ pour tout $w \in \mathrm{Ker}(C)$ (c'est-à-dire $\nabla J(u) \in (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$).

Corrigé – *On suppose que u est solution de (2). Soit $w \in \mathrm{Ker}(C)$. Comme $u + w \in K$ et $u - w \in K$, la question 1 donne $\nabla J(u) \cdot w = 0$.*

Réciproquement, on suppose que u vérifie $\nabla J(u) \cdot w = 0$ pour tout $w \in \mathrm{Ker}(C)$. Soit $v \in K$. On a $v - u \in \mathrm{Ker}(C)$ et donc $\nabla J(u) \cdot (v - u) = 0 \geq 0$. la question 1 donne alors que u est solution de (2).

4.(a) Montrer que $\mathrm{Im}(C^t) \subset (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$ (c'est-à-dire que $v \cdot w = 0$ pour tout $v \in \mathrm{Im}(C^t)$ et $w \in \mathrm{Ker}(C)$).

Corrigé – *Soit $v \in \mathrm{Im}(C^t)$ et $w \in \mathrm{Ker}(C)$. Comme $v \in \mathrm{Im}(C^t)$, il existe $z \in \mathbb{R}^p$ tel que $C^t z = v$. On a donc $v \cdot w = C^t z \cdot w = z \cdot Cw = 0$ (car $w \in \mathrm{Ker}(C)$). On a bien montré que $\mathrm{Im}(C^t) \subset (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$.*

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(C^t) = (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$.
[On rappelle que si F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^n$.]

Corrigé – *Le théorème du rang et le fait que $\mathrm{rang(C)} = \mathrm{rang(C^t)}$ donnent $\mathrm{rang(C^t)} + \dim(\mathrm{Ker(C)}) = \mathrm{n}$. On a donc*

$$\dim(\mathrm{Im}(C^t)) = \mathrm{rang(C^t)} = \mathrm{n} - \dim(\mathrm{Ker(C)}).$$

Comme $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(C) \oplus (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$, on a aussi $\dim((\mathrm{Ker}(C))^{\perp}) = n - \dim(\mathrm{Ker}(C))$. On a donc $\dim(\mathrm{Im}(C^t)) = \dim((\mathrm{Ker}(C))^{\perp})$ et (par la question $4(a)$) $\mathrm{Im}(C^t) \subset (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$. Ceci est suffisant pour conclure que $\mathrm{Im}(C^t) = (\mathrm{Ker}(C))^{\perp}$.

5. Déduire des deux questions précédentes que u est solution de (2) si seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\nabla J(u) + C^t \lambda = 0, \tag{3}$$
$$Cu = d. \tag{4}$$

Corrigé – *Si u est solution de (2), on a $Cu = d$, c'est-à-dire (4), et, d'après les questions $4(b)$ et 3, $\nabla J(u) \in \mathrm{Im}(C^t)$. Il existe donc λ tel que $\nabla J(u) + C^t \lambda = 0$, ce qui donne (3).*

Réciproquement, si il existe λ tel que (u, λ) vérifie (3)-(4). On a bien $u \in K$ (par (4)) et $\nabla J(u) \in \mathrm{Im}(C^t)$, ce qui donne, d'après les questions $4(b)$ et 3, que u est solution de (2).

6. On suppose maintenant que $\mathrm{rang(C)} = \mathrm{p}$ et que $J(v) = \frac{1}{2} Av \cdot v - b \cdot v$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que (3)-(4) est un système linéaire de $n + p$ équations à $n + p$ inconnues ayant une unique solution.

Corrigé – *On a $\nabla J(v) = Av - b$ pour tout v dans $\mathbb{R}^n$. Le système (3)-(4) devient donc*

$$Au + C^t \lambda = b, \tag{5}$$
$$Cu = d, \tag{6}$$

qui est bien un système linéaire de $n + p$ équations à $n + p$ inconnues. Pour montrer qu'il a une unique solution (pour b et d donnés), il suffit de montrer que pour $b = 0$ et $d = 0$ la seule solution de ce système est $u = 0$ et $\lambda = 0$.

on suppose donc $b = 0$ et $d = 0$.
En prenant le produit scalaire de (5) avec u on obtient

$$Au \cdot u + C^t \lambda \cdot u = 0.$$

Mais, comme $C^t \lambda \cdot u = \lambda \cdot Cu = 0$ (grâce à (6)), on en déduit que $Au \cdot u = 0$ et donc $u = 0$ (car A est s.d.p.).
Avec (5), on a alors $C^t \lambda = 0$. On utilise maintenant le fait que $\mathrm{rang(C)} = \mathrm{p}$. Ceci donne que $\mathrm{rang(C^t)} = \mathrm{p}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(C^t)) = 0$ (par le théorème du rang). On a donc $\mathrm{Ker}(C^t) = \{0\}$ et donc $\lambda = 0$.