Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique
Partiel du 2 novembre 2015

La partiel contient 4 exercices. Le barème est sur 27 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20…

Exercice 1 (A propos de $BB^t = I$, barème 3 points)**.**
Pour $n \geq 1$, on note I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $BB^t = I_2$ (justifier la réponse) ?
2. Soit $n > 2$, Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $BB^t = I_n$ (justifier la réponse) ?

Exercice 2 (Décomposition LU et mineurs principaux, barème 4 points)**.**
Soit $n \geq 1$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ si } i > j, \\ 1 \text{ si } i = j, \\ 1 \text{ si } j = n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\det A = 2^{n-1}$. [On pourra par exemple raisonner par récurrence et remarquer que $\det A = \det B$ où B est obtenue en ajoutant, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, la première ligne de A à la i-ieme ligne de A, ce qui correspond à la première étape de l'algorithme de décomposition LU.]
2. Montrer que A admet une décomposition LU sans permutation et calculer les coefficients diagonaux de la matrice U.

Exercice 3 (Conservation du profil, barème 4 points)**.** On considère des matrices A et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme suivante, où x en position (i, j) de la matrice signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est non nul et 0 en position (i, j) de la matrice signifie que $a_{i,j} = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} \\ \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} & 0 \\ 0 & \mathsf{x} & \mathsf{x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{x} & \mathsf{x} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} & 0 \\ \mathsf{x} & \mathsf{x} & 0 & \mathsf{x} \\ 0 & \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} \\ 0 & \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} \end{bmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices, quels sont les coefficients nuls (notés 0 dans les matrices) qui resteront nécessairement nuls dans les matrices L et U de la factorisation LU sans permutation (si elle existe) ?

Exercice 4 (Systèmes linéaires, "Mauvaise relaxation", barème 16 points)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p.. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j,\ d_{i,i} = a_{i,i}, \\ E = (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j,\ e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j, \\ F = (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j,\ f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j. \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à calculer $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$. Pour $0 < \omega < 2$, on considère la méthode itérative suivante :

(a) Initialisation : On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
(b) Itérations : Pour $k \in \mathbb{N}$,
On calcule $\tilde{x}^{(k+1)}$ dans $\mathbb{R}^n$ solution de $(D - E)\tilde{x}^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$,
On pose $x^{(k+1)} = \omega\tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}$.

Enfin, on pose $M = \frac{D-E}{\omega}$ et $N = M - A$.

1. Montrer que la méthode s'écrit aussi $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ et que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie (c'est-à-dire que M est inversible).
2. On suppose dans cette question que $0 < \omega \leq 1$. Montrer que $M^t + N$ est s.d.p..
   N.B. : Un lemme du polycopié (lemme 1.53) donne alors que la méthode est convergente.
3. On suppose, dans cette question, que $n = 2$. On pose $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma^2 < \alpha\beta$.
   (b) Montrer que la méthode est convergente pour $0 < \omega < 2$. [Indication : Soit μ une valeur propre de $M^{-1}N$, montrer que $\mu \in]-1, 1[$.]
   (c) Montrer, en donnant un exemple, que $M^t + N$ n'est pas toujours s.d.p.. [Prendre $\gamma \neq 0$.]
4. On suppose, dans cette question, que $n = 3$ et on prend $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, avec $-\frac{1}{2} < a < 1$.
   (a) Vérifier que A est bien s.d.p..
   (b) Montrer que si $a = -1/2$ et $\omega = 2$, la matrice M est toujours inversible (mais A n'est plus s.d.p.) et que $\rho(M^{-1}N) > 1$. En déduire qu'il existe $a \in]-1/2, 1[$ et $\omega \in]0, 2[$ tels que $\rho(M^{-1}N) > 1$.
5. On suppose $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice A ($A \in M_n(\mathbb{R})$, A s.d.p) pour laquelle la méthode est non convergente pour certains $\omega \in]0, 2[$. [Utiliser la question précédente.]