Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique
Partiel du 2 novembre 2015

La partiel contient 4 exercices. Le barème est sur 27 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20…

Exercice 1 (A propos de $BB^t = I$, barème 3 points)**.**
Pour $n \geq 1$, on note I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $BB^t = I_2$ (justifier la réponse) ?

   Corrigé – *Non…*
   Soit $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. *On a* $BB^t = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ba & b^2 \end{bmatrix}$. *Pour que* $BB^t = I_2$*, il faut donc* $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ *et* $ab = 0$*, ce qui est impossible.*
   Un autre raisonnement possible consiste à remarquer que, pour tout $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$*, on a* $\mathrm{rang(BB^t)} \leq 1 \neq \mathrm{rang(I_2)} = 2$.

2. Soit $n > 2$, Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $BB^t = I_n$ (justifier la réponse) ?

   Corrigé – *Non. Ici aussi il suffit de remarquer que pour tout* $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *on a* $\mathrm{rang(BB^t)} \leq 1 \neq \mathrm{rang(I_n)} = \mathrm{n}$.

Exercice 2 (Décomposition LU et mineurs principaux, barème 4 points)**.**
Soit $n \geq 1$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ si } i > j, \\ 1 \text{ si } i = j, \\ 1 \text{ si } j = n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\det A = 2^{n-1}$. [On pourra par exemple raisonner par récurrence et remarquer que $\det A = \det B$ où B est obtenue en ajoutant, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, la première ligne de A à la i-ieme ligne de A, ce qui correspond à la première étape de l'algorithme de décomposition LU.]

   Corrigé – *Les coefficients de la matrice B sont les même que ceux de la matrice A sauf pour* $i \geq 2$ *avec* $j = 1$ *ou* n.

   $$b_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > 1,\ j = 1 \\ 2 \text{ si } i > 1,\ j = n. \end{cases}$$

   En notant a_n *le determinant de A, on en déduit que* $a_n = 2a_{n-1}$*. Comme* $a_1 = 1$*, on a bien, par récurrence,* $a_n = 2^{n-1}$.

2. Montrer que A admet une décomposition LU sans permutation et Calculer les coefficients diagonaux de la matrice U.

   Corrigé – *Les mineurs de A sont tous égaux à* 1 *sauf le dernier qui vaut* 2^{n-1} *(car le dernier mineur est le déterminant de A). La matrice A admet donc une décomposition LU sans permutation. En notant* $u_{i,i}$ *les éléments diagonaux de U, on sait que le k-ieme mineur de A est égal au produit des* $u_{i,i}$ *pour* $i = 1, \ldots, k$*. On a donc* $u_{i,i} = 1$ *pour* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *et* $u_{n,n} = 2^{n-1}$.

Exercice 3 (Conservation du profil, barème 4 points)**.** On considère des matrices A et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme suivante, où x en position (i, j) de la matrice signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est non nul et 0 en position (i, j) de la matrice signifie que $a_{i,j} = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices, quels sont les coefficients nuls (notés 0 dans les matrices) qui resteront nécessairement nuls dans les matrices L et U de la factorisation LU sans permutation (si elle existe) ?

Corrigé – *Pour la matrice A, les coefficients qui resteront nécessairement nuls dans L (outre la partie supérieure de L) sont $l_{3,1}$ et $l_{4,1}$ et $l_{4,2}$. Il n'y a pas de coefficient qui restera nécessairement nul dans U (outre la partie inférieure stricte de U).*

Pour la matrice B, les coefficients qui resteront nécessairement nuls dans L (outre la partie supérieure de L) sont $l_{3,1}$ et $l_{4,1}$. Il y a un seul coefficient qui restera nécessairement nul dans U (outre la partie partie inférieure stricte de U), c'est $u_{1,4}$.

Exercice 4 (Systèmes linéaires, "Mauvaise relaxation", barème 16 points)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p.. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} D &= (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j,\ d_{i,i} = a_{i,i}, \\ E &= (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j,\ e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j, \\ F &= (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j,\ f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j. \end{aligned}$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à calculer $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$. Pour $0 < \omega < 2$, on considère la méthode itérative suivante :

(a) Initialisation : On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Itérations : Pour $k \in \mathbb{N}$,
On calcule $\tilde{x}^{(k+1)}$ dans $\mathbb{R}^n$ solution de $(D - E)\tilde{x}^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$,
On pose $x^{(k+1)} = \omega\tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}$.

Enfin, on pose $M = \frac{D-E}{\omega}$ et $N = M - A$.

1. Montrer que la méthode s'écrit aussi $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ et que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie (c'est-à-dire que M est inversible).

   Corrigé – *$(D - E)$ est inversible car $\det(D - E) = \prod_{i=1}^n a_{i,i} > 0$ (car A est s.d.p.).*
   La formule donnant $x^{(k+1)}$ peut aussi s'écrire
   $$(D - E)x^{(k+1)} = \omega(D - E)\tilde{x}^{(k)} + (1 - \omega)(D - E)x^{(k)} = \omega Fx^{(k)} + \omega b + (1 - \omega)(D - E)x^{(k)},$$
   ce qui donne en divisant par ω,
   $$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b,$$
   avec $N = F + \frac{1-\omega}{\omega}(D - E) = M - A$.

2. On suppose dans cette question que $0 < \omega \leq 1$. Montrer que $M^t + N$ est s.d.p..
   N.B. : Un lemme du polycopié (lemme 1.53) donne alors que la méthode est convergente.

   Corrigé – *On remarque que $M^t + N = \frac{D}{\omega} + \frac{1-\omega}{\omega}A$. On en déduit que $M^t + N$ est symétrique car A et D le sont. La matrice $M^t + N$ est bien s.d.p. si $0 < \omega \leq 1$ car, pour $x \neq 0$, on a $\frac{D}{\omega}x \cdot x > 0$ et $\frac{1-\omega}{\omega}Ax \cdot x \geq 0$.*

3. On suppose, dans cette question, que $n = 2$. On pose $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$.

   (a) Montrer que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma^2 < \alpha\beta$.

   Corrigé – *Comme A est s.d.p., on a $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\det A > 0$, ce qui donne $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$.*

   (b) Montrer que la méthode est convergente pour $0 < \omega < 2$. [Indication : Soit μ une valeur propre de $M^{-1}N$, montrer que $\mu \in]-1, 1[$.]

Corrigé – *Le nombre complexe μ est une valeur propre de $M^{-1}N$ si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que $Nx = \mu Mx$, ce qui équivalent à dire que* $\det(N - \mu M) = 0$.

Comme $M = \frac{D-E}{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\omega} & 0 \\ \frac{\gamma}{\omega} & \frac{\beta}{\omega} \end{bmatrix}$ *et* $N = F + \frac{1-\omega}{\omega}(D-E) = \begin{bmatrix} \frac{1-\omega}{\omega}\alpha & -\gamma \\ \frac{1-\omega}{\omega}\gamma & \frac{1-\omega}{\omega}\beta \end{bmatrix}$*, on a*

$$N - \mu M = \begin{bmatrix} \frac{1-\omega-\mu}{\omega}\alpha & -\gamma \\ \frac{1-\omega-\mu}{\omega}\gamma & \frac{1-\omega-\mu}{\omega}\beta \end{bmatrix}.$$

on a donc $\det(N - \mu M) = 0$ *si et seulement si*

$$\frac{1-\omega-\mu}{\omega}\big[\frac{1-\omega-\mu}{\omega}\alpha\beta + \gamma^2\big] = 0.$$

Les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont donc μ_1 et μ_2 avec

$$\mu_1 = 1 - \omega,$$

$$\mu_2 = 1 - \omega(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}).$$

On a bien $\mu_1 \in]-1,1[$ car $\omega \in]0,2[$.

Comme $0 < \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} < 1$ et $\omega \in]0,2[$, on a $\omega(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}) \in]0,2[$ et donc $\mu_2 \in]-1,1[$.

On en déduit que $\rho(M^{-1}N) = \max\{|\mu_1|, |\mu_2|\} < 1$ et donc que la méthode est convergente.

(c) Montrer, en donnant un exemple, que $M^t + N$ n'est pas toujours s.d.p.. [Prendre $\gamma \neq 0$.]

Corrigé – *On suppose ici $\gamma \neq 0$.*

On a $M^t + N = \begin{bmatrix} \frac{2-\omega}{\omega}\alpha & \frac{1-\omega}{\omega}\gamma \\ \frac{1-\omega}{\omega}\gamma & \frac{2-\omega}{\omega}\beta \end{bmatrix}$*. La matrice $M^t + N$ est donc symétrique (et a donc des valeurs propres réelles) mais* $\det(M^t + N) = \frac{(2-\omega)^2}{\omega^2}\alpha\beta - \frac{(1-\omega)^2}{\omega^2}\gamma^2$.

Comme $\lim_{\omega \to 2} \frac{(2-\omega)^2}{\omega^2}\alpha\beta - \frac{(1-\omega)^2}{\omega^2}\gamma^2 = -\frac{1}{4}\gamma^2 < 0$*, il existe donc, par continuité, $\bar{\omega} \in]0,2[$ tel que*

$$\bar{\omega} < \omega < 2 \Rightarrow \det(M^t + N) > 0,$$

ce qui prouve que $M^t + N$ n'est pas s.d.p. pour $\omega \in]\bar{\omega}, 2[$.

4. On suppose, dans cette question, que $n = 3$ et on prend $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, avec $-\frac{1}{2} < a < 1$.

(a) Vérifier que A est bien s.d.p..

Corrigé – *On pose* $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*, de sorte que $A = I_3 + aC$.*

La dimension de $\mathrm{Im}(C + I_3)$ *est 1 (et donc* $\dim(\mathrm{Ker}(C + I_3)) = 2$*) et la trace de C est 0. On en déduit que (-1) est valeur propre double de C et 2 est valeur propre (simple) de C. Les valeurs propres de A sont donc $(1-a)$ et $(1+2a)$.*

Pour $-\frac{1}{2} < a < 1$, A est donc symétrique et ses valeurs sont strictement positives. On en déduit que A est s.d.p..

(b) Montrer que si $a = -1/2$ et $\omega = 2$, la matrice M est toujours inversible (mais A n'est plus s.d.p.) et que $\rho(M^{-1}N) > 1$. En déduire qu'il existe $a \in]-1/2, 1[$ et $\omega \in]0,2[$ tels que $\rho(M^{-1}N) > 1$.

Corrigé – *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$. On a* $\det(M) = 1/(\omega^3) \neq 0$*. La matrice M est donc inversible. Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe μ est valeur propre de $M^{-1}N$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tel que $Nx = \mu Mx$, ce qui est équivalent à dire* $\det(N - \mu M) = 0$.

En posant $r = \frac{1-w-\mu}{\omega}$*, on a* $N - \mu M = \begin{bmatrix} r & -a & -a \\ ra & r & -a \\ ra & ra & r \end{bmatrix}$.

On a donc $\det(N - \mu M) = 0$ *si et seulement*

$$r(r^2 + 3a^2 r - a^3 r + a^3) = 0. \tag{1}$$

Pour $a = -1/2$, *la relation* (1) *devient* $(1/8)r(8r^2 + 7r - 1) = 0$ *dont les solutions sont* $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ *et* $r_3 = 1/8$. *Les valeurs propres de* $M^{-1}N$ *sont donc* $\mu_i = 1 - \omega - r_i\omega$ *pour* $i = 1, 2, 3$, *c'est-à-dire*

$$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1 - \omega,\ \mu_3 = 1 - \omega - \omega/8.$$

Pour $\omega = 2$, *on a* $\mu_3 = -1 - 1/4 < -1$ *et donc* $\rho(M^{-1}N) > 1$.

La formule (1) *et la relation entre* r *et* μ *montrent que les valeurs propres de* $M^{-1}N$ *dépendent continûment de* a *et* w, *lorsque* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^\star$. *Il existe donc* $a \in]-1/2, 1[$ *et* $\omega \in]0, 2[$ *tels que* $\rho(M^{-1}N) > 1$ *(i suffit de prendre* $a = -1/2 + \varepsilon$ *et* $\omega = 2 - \varepsilon$ *avec* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit).*

5. On suppose $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice A ($A \in M_n(\mathbb{R})$, A s.d.p) pour laquelle la méthode est non convergente pour certains $\omega \in]0, 2[$. [Utiliser la question précédente.]

   Corrigé –

   Pour $n = 3$, *il suffit de prendre* $A = A_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$,

   et $a = -1/2 + \varepsilon$, $\omega = 2 - \varepsilon$ *avec* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit comme à la question précédente.*

   Pour $n > 3$, *les mêmes choix de* a *et* ω *conviennent en prenant* $A = \begin{bmatrix} A_3 & 0_{3,n-3} \\ 0_{n-3,3} & I_{n-3} \end{bmatrix}$, *où* $0_{p,q}$ *désigne la matrice nulle dans* $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.