

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
Examen du 11 janvier 2017

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 28 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20.

Exercice 1 (Résolution d'un système sous forme particulière, barème 10 points).

Soit $n \geq 1$, $p \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On suppose que A est une matrice symétrique définie positive et que $\text{rang}(B) = p$ (ceci implique que $p \leq n$).

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose $z_i = A^{-1}c_i(B)$ où $c_i(B)$ désigne la i -ième colonne de B .

1. Montrer que $\{c_i(B), i \in \{1, \dots, p\}\}$ est une base de $\text{Im}(B)$.
En déduire que $\{z_i, i \in \{1, \dots, p\}\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\{B^t z_i, i \in \{1, \dots, p\}\}$ est une base de $\mathbb{R}^p$.

Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^p$. On cherche le couple (x, y) , avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$, solution du système suivant (écrit sous forme de blocs) :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}. \quad (1)$$

On pose $z = A^{-1}b$ et on note $y_1, \dots, y_p$ les composantes de y .

3. Montrer que (x, y) est solution de (1) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^p y_i B^t z_i = B^t z - c, \quad (2)$$

$$x = z - \sum_{i=1}^p y_i z_i. \quad (3)$$

En déduire que le système (1) a une unique solution.

4. Montrer que la matrice (symétrique) $\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix}$ est inversible mais n'est pas symétrique définie positive.
5. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Donner une condition sur C (ne dépendant ni de A ni de B) impliquant que la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ est inversible.

Exercice 2 (Méthode de Newton pour calculer une valeur propre, barème 6 points).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$) une matrice symétrique. Soient $\bar{\lambda}$ une valeur propre simple de A et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \notin \text{Ker}(A - \bar{\lambda}I)$ (où I est la matrice "identité").

1. Montrer qu'il existe un unique $\bar{u} \in \text{Ker}(A - \bar{\lambda}I)$ tel que $\bar{u} \cdot a = 1$.

Dans la suite, on cherche à calculer le couple $(\bar{u}, \bar{\lambda})$, $\bar{u}$ donné par la question 1, avec l'algorithme de Newton. On définit F de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $F\left(\begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Au - \lambda u \\ u \cdot a - 1 \end{bmatrix}$ (pour $u \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

2. Pour tout $\begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, calculer la matrice jacobienne de F au point $\begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix}$.
3. Ecrire l'algorithme de Newton pour trouver les points où F s'annule.
4. On note $(u^{(0)}, \lambda_0)$ l'initialisation de l'algorithme de Newton appliqué à la recherche d'un point où F s'annule. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|u^{(0)} - \bar{u}| \leq \varepsilon$ et $|\lambda_0 - \bar{\lambda}| \leq \varepsilon$, la suite donnée par l'algorithme de Newton existe et converge vers $(\bar{u}, \bar{\lambda})$.

Exercice 3 (Gauss-Seidel et optimisation, barème 12 points). Soit A une matrice carrée d'ordre n , symétrique définie positive, et $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$. On note D la partie diagonale de A , $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} D &= (d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j, \quad d_{i,i} = a_{i,i}, \\ E &= (e_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j, \quad e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j, \\ F &= (f_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j, \quad f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$.

1. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel pour calculer la solution du système $Ax = b$ peut s'écrire sous la forme suivante :

Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,

Itérations : pour tout $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = x^{(k)} + w^{(k)}$, avec $w^{(k)} = (D - E)^{-1}r^{(k)}$, $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

2. Dans cette question, on étudie la méthode de Gauss-Seidel écrite sous la forme donnée à la question 1.
 - (a) Soit $k \geq 0$. On suppose que $w^{(k)} = 0$. Montrer que $x^{(p)} = \bar{x}$ pour tout $p \geq k$.
 - (b) Soit $k \geq 0$. On suppose que $w^{(k)} \neq 0$. Montrer que $2r^{(k)} \cdot w^{(k)} = Aw^{(k)} \cdot w^{(k)} + Dw^{(k)} \cdot w^{(k)}$. [On pourra utiliser le fait que $F = E^t$.]
 - (c) Dédurre des questions (2a) et (2b) que la méthode de Gauss-Seidel est une méthode de descente pour la minimisation de f et que $w^{(k)}$ est une direction de descente stricte en $x^{(k)}$ dès que $w^{(k)} \neq 0$.
3. On cherche maintenant à améliorer la méthode de Gauss-Seidel en prenant non plus un pas fixe dans l'algorithme de descente de la question 1, mais un pas optimal qui est défini à l'itération k par

$$f(x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}) = \min_{\alpha > 0} f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)}), \quad (4)$$

où $w^{(k)}$ est défini à la question 1. On définit alors une méthode de descente à pas optimal par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}.$$

On appelle cette nouvelle méthode "méthode de Gauss-Seidel à pas optimal".

- (a) Soit $k \geq 0$ tel que $w^{(k)} \neq 0$. Justifier l'existence et l'unicité du pas optimal défini par (4) et donner son expression.
- (b) Soit $k \geq 0$ tel que $w^{(k)} \neq 0$. Montrer que $f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) = \frac{|r^{(k)} \cdot w^{(k)}|^2}{2Aw^{(k)} \cdot w^{(k)}}$.
- (c) Montrer que $r^{(k)} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, et en déduire que la suite donnée par la méthode de Gauss-Seidel à pas optimal converge vers la solution $\bar{x}$ du système linéaire $Ax = b$.