Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique et optimisation
Examen du 22 juin 2017

Le polycopié du cours et les notes personnelles sont autorisés.
L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 22 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20.

Exercice 1 (Déterminant d'une matrice sous forme de blocs, barème 6 points)**.**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n > 1)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la matrice $\bar{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie sous forme de blocs de la manière suivante :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^t & \lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

On montre dans cet exercice que les deux assertions suivantes sont, sauf cas particuliers, fausses :

A1 $\det(\bar{A}) = \lambda \det(A) - \det(bc^t)$,

A2 $\det(\bar{A}) = \lambda \det(A) - c^t\, b$,

1. Dans cette question, on prend $n \geq 2$, $A = 0$, $b = c$ et on suppose que $b \neq 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rang}(\bar{A}) \leq 2$ et en déduire que $\bar{A}$ n'est pas inversible.
   (b) En déduire que l'assertion A2 est fausse pour cet exemple.
2. Dans cette question, on suppose que A est symétrique définie positive, $\lambda = 0$, $b = c$ et que $b \neq 0$.
   (a) Montrer que $\bar{A}$ est inversible et que $\mathrm{rang}(bb^t) = 1$.
   (b) En déduire que l'assertion A1 est fausse pour cet exemple.

Exercice 2 (Vitesse de convergence pour la méthode de Jacobi, barème 8 points)**.**
Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible, et $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A.
On suppose que D est inversible et on note B_J la matrice des itérations de la méthode de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E + F)$. On rappelle que la méthode de Jacobi sécrit
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
Itérations : pour tout $k \geq 0$, $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$.
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note ρ le rayon spectral de B_J.

1. On suppose que B_J est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de B_J). Montrer qu'il existe $C > 0$, dépendant de A, b, $x^{(0)}$ et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, mais indépendant de k, telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| \leq C\rho^k \text{ pour tout } k \geq 0.$$
2. On suppose que B_J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de B_J). Montrer que la conclusion de la question 1 reste vraie.
3. On ne suppose plus que B_J est diagonalisable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$, dépendant de A, b, $x^{(0)}$, ε et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, mais indépendant de k, telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| \leq C_\varepsilon(\rho + \varepsilon)^k \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Dans la suite de cet exercice on prend $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Dans cette question, on choisit, pour norme dans $\mathbb{R}^2$, la norme euclidienne, c'est-à-dire $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Montrer qu'il existe C (dépendant de b et $x^{(0)}$, mais non de k) telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| = C\rho^k \text{ pour tout } k \geq 0. \tag{2}$$
5. Montrer qu'il existe des normes dans $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles la conclusion de la question 4 est fausse (c'est-à-dire pour lesquelles la suite $(\|x^{(k)} - \overline{x}\|/\rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite constante).

Exercice 3 (Algorithme de Newton pour calculer une racine cubique, barème 8 points)**.**
Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. On a donc $Ae_i = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i > 0$, $e_i \cdot e_j = 0$ pour $i \neq j$ et $e_i \cdot e_i = 1$.
Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $F(B) = B^3 - A$.

1. Montrer que la matrice X définie par $Xe_i = \mu_i e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, avec $\mu_i^3 = \lambda_i$, est une racine cubique de A (c'est-à-dire une solution de $F(X) = 0$). Montrer que X est symétrique.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'algorithme de Newton pour calculer X.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La différentielle de F au point B, notée $DF(B)$, est donc une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'expression de $DF(B)H$.
3. Montrer que $DF(X)$ est une application inversible.
   [On pourra, par exemple, calculer $DF(X)He_i \cdot e_j$ et montrer que $DF(X)H = 0$ implique $H = 0$.]
4. Donner l'algorithme de Newton pour calculer X et montrer que l'algorithme de Newton donne une suite convergente vers X si l'initialisation de l'algorithme est faite avec une matrice suffisamment proche de X.