Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique et optimisation
Partiel du 19 octobre 2016

La partiel contient 4 exercices. Le barème est sur 27 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20...

Exercice 1 (Conservation du profil, barème 2 points). On considère la matrice A de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ de la forme suivante, où x en position (i, j) de la matrice signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est non nul et 0 en position (i, j) de la matrice signifie que $a_{i,j} = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix}.$$

Pour cette matrice, quels sont les coefficients nuls (notés 0 dans la matrice) qui resteront nécessairement nuls dans les matrices L et U de la factorisation LU sans permutation (si elle existe) ?

Exercice 2 (Rayon spectral et norme, barème 8 points).
Soit $n > 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^\star$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que

$|\lambda| = \rho(A)$,

$x \neq 0$, $Ax = \lambda x$ et $Ay = \lambda y + \mu x$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\rho(A) < \|A\|$ pour toute norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose donc $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite aussi notée $\|\cdot\|$.

1. Montrer que $y \neq 0$ et $x + ay \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. [Utiliser le fait que $\mu \neq 0$.]
2. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$ (et donc $\rho(A) = 1$).
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, avec $\varepsilon\mu > 0$, on a
   $$\|(1 + \varepsilon\mu)x + \varepsilon y\| \geq \|(1 + \varepsilon\mu)(x + \varepsilon y)\| - \|\varepsilon^2 \mu y\| = \|x + \varepsilon y\| + \varepsilon\mu(\|x + \varepsilon y\| - \|\varepsilon y\|). \tag{1}$$
   (b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\|A(x + \varepsilon y)\| > \|x + \varepsilon y\|$. [Calculer $A(x + \varepsilon y)$ et utiliser (1).]
   En déduire que $\rho(A) < \|A\|$.
3. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 0$. Montrer que $\rho(A) < \|A\|$.
   [Appliquer la question 2 à une matrice B bien choisie.]
4. On suppose dans cette question que $\lambda = 0$. Montrer que $\rho(A) < \|A\|$.
5. Donner un exemple d'une matrice A vérifiant les hypothèses de l'exercice avec $\lambda = 3$ et $\mu = 1$ (on pourra se limiter à $n = 2$).

Exercice 3 (Non convergence d'une méthode itérative, barème 3 points).
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B telle que $|\lambda| = \rho(B) \geq 1$. On suppose que $\lambda \notin \mathbb{R}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ tel que $Bz = \lambda z$. On note r la partie réelle de z et s la partie imaginaire (donc $z = r + is$). Pour $k \geq 0$, on pose $r^{(k)} = B^k r$ et $s^{(k)} = B^k s$. Montrer que l'une (au moins) des suites $(r^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(s^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$.
2. Soit $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = Bx + c$. On considère la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ pour $k \geq 0$. Montrer qu'il existe $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ pour lequel $x^{(k)} \not\to x$ quand $k \to +\infty$.

Exercice 4 (Sur la méthode de Jacobi, barème 14 points)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p.. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A, c'est-à-dire :

$$
\begin{aligned}
D &= (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j,\ d_{i,i} = a_{i,i},\\
E &= (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j,\ e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j,\\
F &= (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j,\ f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j.
\end{aligned}
$$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec leur multiplicité et rangées par ordre croissant, c'est-à-dire $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
On note $f_1, \ldots, f_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, $Af_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = \lambda_n$. Montrer que $A = \lambda_1 I_n$ (où I_n est la matrice "identité").

Dans la suite, on suppose $\lambda_1 < \lambda_n$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = \alpha I_n$.

2. Montrer que $\lambda_1 < \alpha < \lambda_n$. [On pourra utiliser la trace de A.]

On note B_J la matrice de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E + F)$.

3. Montrer que B_J est symétrique et calculer les valeurs propres de B_J en fonction de celles de A et de α. [Calculer $B_J f_i$.]
4. Calculer $\rho(B_J)$ en fonction et λ_1, λ_n et α. Montrer que $\rho(B_J) < 1$ si et seulement si $\lambda_n < 2\alpha$.

On suppose maintenant que $\rho(B_J) < 1$ et on s'intéresse à la méthode itérative de Jacobi, c'est-à-dire

(a) Initialisation : On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
(b) Itérations : Pour $k \in \mathbb{N}$, $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$,

5. Soit $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. On suppose dans cette question que $b = \alpha f_i$ et que $\lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n$.
   (a) On suppose que $x^{(0)} = 0$. Montrer que $x^{(k)} = \gamma_k f_i$, avec $\gamma_k \in \mathbb{R}$. On pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. Montrer que
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = \frac{|\lambda_i - \alpha|}{\alpha} < \rho(B_J).$$
   (b) On suppose que $x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$, avec $\alpha_n \neq 0$, et que $\alpha - \lambda_1 < \alpha\rho(B_J) = \lambda_n - \alpha$.
   On pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. Montrer que
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = \rho(B_J).$$
6. On suppose dans cette question que $A \neq D$ (et donc $F \neq 0$). Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que si f_i est un vecteur propre de B_{GS}, on a alors $\lambda_i = \alpha$. (on rappelle que $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$).
7. On ne suppose plus qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = \alpha I_n$
   (a) Montrer que $\lambda_1 \leq a_{i,i} \leq \lambda_n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   (b) Donner un exemple pour lequel la matrice B_J n'est pas symétrique.
   (c) (Question facultative) Donner un exemple pour lequel les vecteurs propres de A ne sont pas vecteurs propres de B_J.