Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique et optimisation
Partiel du 19 octobre 2016

La partiel contient 4 exercices. Le barème est sur 27 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20…

Exercice 1 (Conservation du profil, barème 2 points)**.** On considère la matrice A de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ de la forme suivante, où x en position (i,j) de la matrice signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est non nul et 0 en position (i,j) de la matrice signifie que $a_{i,j}=0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix}.$$

Pour cette matrice, quels sont les coefficients nuls (notés 0 dans la matrice) qui resteront nécessairement nuls dans les matrices L et U de la factorisation LU sans permutation (si elle existe) ?

Corrigé – *Les coefficients qui resteront nuls (autres que ceux de la partie supérieure de L et de la partie inférieure de U) sont :* $l_{3,1}$, $l_{4,1}$, $l_{4,2}$, $u_{1,4}$, $u_{2,4}$, $u_{3,4}$.

Exercice 2 (Rayon spectral et norme, barème 8 points)**.**
Soit $n > 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^\star$, x, $y \in \mathbb{R}^n$ tels que

$|\lambda| = \rho(A)$,

$x \neq 0$, $Ax = \lambda x$ et $Ay = \lambda y + \mu x$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\rho(A) < \|A\|$ pour toute norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose donc $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite aussi notée $\|\cdot\|$.

1. Montrer que $y \neq 0$ et $x + ay \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. [Utiliser le fait que $\mu \neq 0$.]

   Corrigé – $y \neq 0$ *car* $Ay - \lambda y = \mu x \neq 0$.
   Puis si $a \neq 0$, $x + ay \neq 0$ *car* $y \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. *Enfin, si* $a = 0$, $x + ay = x \neq 0$.

2. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$ (et donc $\rho(A) = 1$).
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, avec $\varepsilon\mu > 0$, on a

   $$\|(1+\varepsilon\mu)x + \varepsilon y\| \geq \|(1+\varepsilon\mu)(x+\varepsilon y)\| - \|\varepsilon^2\mu y\| = \|x+\varepsilon y\| + \varepsilon\mu(\|x+\varepsilon y\| - \|\varepsilon y\|). \tag{1}$$

   Corrigé – *L'inégalité triangulaire donne*
   $$\|(1+\varepsilon\mu)(x+\varepsilon y)\| = \|(1+\varepsilon\mu)x + \varepsilon y + \varepsilon^2\mu y\| \leq \|(1+\varepsilon\mu)x + \varepsilon y\| + \|\varepsilon^2\mu y\|,$$
   et donc $\|(1+\varepsilon\mu)x + \varepsilon y\| \geq \|(1+\varepsilon\mu)(x+\varepsilon y)\| - \|\varepsilon^2\mu y\|$.
   Puis, comme $\varepsilon\mu > 0$, *on a* $\|(1+\varepsilon\mu)(x+\varepsilon y)\| = (1+\varepsilon\mu)\|x+\varepsilon y\| = \|x+\varepsilon y\| + \varepsilon\mu\|x+\varepsilon y\|$ *et donc*
   $$\|(1+\varepsilon\mu)(x+\varepsilon y)\| - \|\varepsilon^2\mu y\| = \|x+\varepsilon y\| + \varepsilon\mu(\|(x+\varepsilon y)\| - \|\varepsilon y\|).$$

   (b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\|A(x+\varepsilon y)\| > \|x+\varepsilon y\|$. [Calculer $A(x+\varepsilon y)$ et utiliser (1).]
   En déduire que $\rho(A) < \|A\|$.

   Corrigé – *Comme* $\lambda = 1$, *on a, avec (1),*
   $$\|A(x+\varepsilon y)\| = \|(1+\varepsilon\mu)x + \varepsilon y\| \geq \|x+\varepsilon y\| + \varepsilon\mu(\|x+\varepsilon y\| - \|\varepsilon y\|).$$
   Comme $\lim_{\varepsilon\to 0}(\|x+\varepsilon y\| - \|\varepsilon y\|) = \|x\| > 0$, *on peut choisir* ε *suffisamment proche de* 0 *(par exemple, on peut prendre* $\varepsilon = signe(\mu)\|x\|/(3\|y\|)$*) pour que* $(\|x+\varepsilon y\| - \|\varepsilon y\|) > 0$ *avec* $\varepsilon\mu > 0$.
   On en déduit alors que $\|A(x+\varepsilon y)\| > \|x+\varepsilon y\|$ *et donc* $\|A\| > 1$ *(et on rappelle que* $1 = \rho(A)$*).*

3. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 0$. Montrer que $\rho(A) < \|A\|$.
[Appliquer la question 2 à une matrice B bien choisie.]

Corrigé – *On applique la question 2 à la matrice $B = A/\lambda$ qui est telle que $\rho(B) = 1$. On a donc*
$$1 < \|B\| = \|\frac{A}{\lambda}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\|, \text{ ce qui donne bien } \rho(A) = |\lambda| < \|A\|.$$

4. On suppose dans cette question que $\lambda = 0$. Montrer que $\rho(A) < \|A\|$.

Corrigé – *Comme $Ay = \mu x \neq 0$, on a $A \neq 0$ et donc $\|A\| > 0 = \rho(A)$.*

5. Donner un exemple d'une matrice A vérifiant les hypothèses de l'exercice avec $\lambda = 3$ et $\mu = 1$ (on pourra se limiter à $n = 2$).

Corrigé – *Avec $n = 2$, on peut prendre $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ($x = e_1$ et $y = e_2$).*

Exercice 3 (Non convergence d'une méthode itérative, barème 3 points)**.**
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B telle que $|\lambda| = \rho(B) \geq 1$. On suppose que $\lambda \notin \mathbb{R}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ tel que $Bz = \lambda z$. On note r la partie réelle de z et s la partie imaginaire (donc $z = r + is$). Pour $k \geq 0$, on pose $r^{(k)} = B^k r$ et $s^{(k)} = B^k s$. Montrer que l'une (au moins) des suites $(r^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(s^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$.

Corrigé – *On a, pour tout $k \geq 0$, $B^k z = \lambda^k z$. Comme $z \neq 0$ et $|\lambda^k| = |\lambda|^k \geq 1$, on a $B^k z \not\to 0$ (dans $\mathbb{C}^n$) quand $k \to +\infty$. Comme $B^k z = B^k r + iB^k y$, ceci implique bien que l'une (au moins) des suites $(r^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(s^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$.*

2. Soit $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = Bx + c$. On considère la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ pour $k \geq 0$. Montrer qu'il existe $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ pour lequel $x^{(k)} \not\to x$ quand $k \to +\infty$.

Corrigé – *Pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x)$.*
On choisit $z \in \mathbb{C}^n$ comme à la question précédente et si la suite $(r^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$, on choisit $x^{(0)} = x + r$ de sorte $x^{(k)} = x + r^{(k)} \not\to 0$ quand $k \to +\infty$. Bien sûr, si c'est la suite $(s^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$, on choisit $x^{(0)} = x + s$. (Noter qu'on a bien $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.)

Exercice 4 (Sur la méthode de Jacobi, barème 14 points)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p.. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j,\ d_{i,i} = a_{i,i},\\
&E = (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j,\ e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j,\\
&F = (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j,\ f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j.
\end{aligned}$$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec leur multiplicité et rangées par ordre croissant, c'est-à-dire $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
On note $f_1, \ldots, f_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, $Af_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = \lambda_n$. Montrer que $A = \lambda_1 I_n$ (où I_n est la matrice "identité").

Corrigé – *Pour tout i on a $Af_i = \lambda_1 f_i$. Comme $f_1, \ldots, f_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a donc $Ax = \lambda_1 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et donc $A = I_n$.*

Dans la suite, on suppose $\lambda_1 < \lambda_n$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = \alpha I_n$.

2. Montrer que $\lambda_1 < \alpha < \lambda_n$. [On pourra utiliser la trace de A.]

Corrigé – *trace*$(A) = n\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *et donc, comme* λ_1 *est la plus petite valeur propre,* λ_n *la plus grande et* $\lambda_1 < \lambda_n$, $n\lambda_1 < n\alpha < n\lambda_n$. *Ce qui donne bien* $\lambda_1 < \alpha < \lambda_n$.

On note B_J la matrice de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E + F)$.

3. Montrer que B_J est symétrique et calculer les valeurs propres de B_J en fonction de celles de A et de α. [Calculer $B_J f_i$.]

Corrigé – $B_J = \frac{1}{\alpha}(E + F) = \frac{1}{\alpha}(D - A)$ *et donc* B_J *est symétrique car* $D - A$ *est symétrique.*
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. *On a* $B_J(f_i) = \frac{1}{\alpha}(\alpha - \lambda_i)f_i$. *Comme* $f_1, \ldots, f_n$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$, *ceci est suffisant pour dire que les valeurs propres de* B_J *sont les nombres* $\frac{1}{\alpha}(\alpha - \lambda_i)f_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $f_1, \ldots, f_n$ *est donc une base de* $\mathbb{R}^n$ *formée de vecteurs propres de* B_J.
Dans la suite, on note $\mu_i = \dfrac{1}{\alpha}(\alpha - \lambda_i)$.

4. Calculer $\rho(B_J)$ en fonction et λ_1, λ_n et α. Montrer que $\rho(B_J) < 1$ si et seulement si $\lambda_n < 2\alpha$.

Corrigé – *Comme* $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$, *on a* $\rho(B_J) = \max\{|\mu_1|, |\mu_n|\} = \max\{|\frac{1}{\alpha}(\alpha - \lambda_1)|, |\frac{1}{\alpha}(\alpha - \lambda_n)|\}$. *Comme* λ_1, λ_n *et* α *sont strictement positifs et* $\lambda_1 < \lambda_n$, *on en déduit que* $\rho(B_J) = \max\{\frac{1}{\alpha}(\lambda_n - \alpha), \frac{1}{\alpha}(\alpha - \lambda_1)\}$.
On a $\rho(B_J) < 1$ *si et seulement si* $\lambda_n - \alpha < \alpha$ *et*
$a - \lambda_1 < \alpha$, *c'est-à-dire* $\lambda_n < 2\alpha$ *et* $\lambda_1 > 2\alpha$. *Comme* $\lambda_1 < \alpha$, *la seule condition restatnte est* $\lambda_n < 2\alpha$.

On suppose maintenant que $\rho(B_J) < 1$ et on s'intéresse à la méthode itérative de Jacobi, c'est-à-dire

(a) Initialisation : On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
(b) Itérations : Pour $k \in \mathbb{N}$, $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$,

5. Soit $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. On suppose dans cette question que $b = \alpha f_i$ et que $\lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n$.
   (a) On suppose que $x^{(0)} = 0$. Montrer que $x^{(k)} = \gamma_k f_i$, avec $\gamma_k \in \mathbb{R}$. On pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. Montrer que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = \frac{|\lambda_i - \alpha|}{\alpha} < \rho(B_J).$$

Corrigé – *La méthode est convergente (car* $\rho(B) < 1$*) et s'écrit aussi* $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_i$. *On a* $x^{(0)} = \gamma_0 f_i$ *avec* $\gamma_0 = 0$. *Puis, par récurrence, si* $x^{(k)} = \gamma_k f_i$ *(pour* $k \geq 0$*), on a* $x^{(k+1)} = \gamma_{k+1} f_i$ *avec* $\gamma_{k+1} = \mu_i \gamma_k + 1$. *Le vecteur* $x^{(k)}$ *est donc bien toujours colinéaire à* f_i *(et* x *est donc aussi colinéaire à* f_i*). On peut calculer* x, *unique solution de* $x - Bx = f_i$ *c'est-à-dire* $x = \frac{1}{1-\mu_i} f_i$.
Pour tout $k \geq 0$, *on a* $x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x) = \mu_i(x^{(k)} - x)$ *(car* $x^{(k)} - x$ *est colinéaire à* f_i*). On a donc* $x^{(k)} - x = \mu_i^k(x^{(0)} - x) = -\mu_i^k x$, *on en déduit que, pour* $k \geq 0$,
$$\frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = |\mu_i| = \frac{|\lambda_i - \alpha|}{\alpha} < \rho(B_J) \text{ car } \lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n.$$
Autre méthode : *En utilisant la relation* $\gamma_{k+1} = \mu_i \gamma_k + 1$, *on peut montrer directement (par récurrence sur* k*) que, pour* $k \geq 1$,
$$\gamma_k = \sum_{p=0}^{k-1} \mu_i^p = \frac{1 - \mu_i^k}{1 - \mu_i}$$
Comme $|\mu_i| < 1$ *on retrouve le fait que* $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \frac{1}{1-\mu_i} f_i = x$ *et que* $x^{(k)} - x = -\mu_i^k x$.

(b) On suppose que $x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$, avec $\alpha_n \neq 0$, et que $\alpha - \lambda_1 < \alpha\rho(B_J) = \lambda_n - \alpha$.
On pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = \rho(B_J).$$

Corrigé –
On a ici $x^{(0)} - x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$ avec $\beta_j = \alpha_j$ et $j \neq i$ (et $\beta_i = \alpha_i - \frac{1}{1-\mu_i}$). Une récurrence sur k donne alors, avec $p \geq 0$ tel que $\lambda_j = \lambda_n$ (et donc $\mu_j = \rho(B_J)$) pour $j \in \{n-p, \ldots, n\}$,

$$x^{(k)} - x = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^k \beta_j f_j = \rho(B_J)^k \Big(\frac{\mu_n^k}{\rho(B_J)^k} \sum_{j=n-p}^{n} \beta_j f_j + z^{(k)}\Big) = \rho(B_J)^k \Big(\sum_{j=n-p}^{n} \beta_j f_j + z^{(k)}\Big),$$

avec $\lim_{k\to+\infty} z^{(k)} = 0$ (car $|\mu_j| < \rho(B_J)$ si $j < n-p$).
Comme $\beta_n = \alpha_n \neq 0$, on a $\sum_{j=n-p}^{n} \beta_j f_j \neq 0$ et donc $\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)}-x\|}{\|x^{(k)}-x\|} = \rho(B_J)$.

N.B. : *Le calcul exact de $x^{(k)}$ est donc ici $x^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^k \alpha_j f_j + \frac{1-\mu_i^k}{1-\mu_i} f_i$.*

6. On suppose dans cette question que $A \neq D$ (et donc $F \neq 0$). Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que si f_i est un vecteur propre de B_{GS}, on a alors $\lambda_i = \alpha$. (on rappelle que $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$).

Corrigé – Si f_i est vecteur propre de B_{GS} il existe μ tel que $Ff_i = \mu(D-E)f_i$. On a donc

$$Ff_i = \mu(D - E - F)f_i + \mu F f_i = \mu A f_i + \mu F f_i = \mu\lambda_i f_i + \mu F f_i,$$

c'est-à-dire

$$(1-\mu)Ff_i = \mu\lambda_i f_i.$$

Comme $\lambda_i \neq 0$, on a donc $\mu \neq 1$ et $\frac{\mu\lambda_i}{1-\mu}$ est valeur propre de F. Or 0 est la seule valeur propre de F, on a donc $\mu = 0$. Ceci donne $Ff_i = 0$ et donc $(D-E)f_i = Af_i = \lambda_i f_i$. On en déduit que λ_i est valeur propre de $D - E$ et existe donc $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_i = a_{j,j} = \alpha$.

7. On ne suppose plus qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = \alpha I_n$

(a) Montrer que $\lambda_1 \leq a_{i,i} \leq \lambda_n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Corrigé – Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On décompose e_i (i-eme élement de la base canonique) dans une base orthonormée de R^n formée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire $e_i = \sum_{i=j}^{n} \alpha_j f_j$. On a donc $Ae_i = \sum_{i=j}^{n} \alpha_j \lambda_j f_j$ (avec $Af_j = \lambda_j f_j$) et

$$a_{i,i} = Ae_i \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^2.$$

Comme $|e_i| = 1$, on a $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 1$ et on en déduit bien que que $\lambda_1 \leq a_{i,i} \leq \lambda_n$.

(b) Donner un exemple pour lequel la matrice B_J n'est pas symétrique.

Corrigé – On peut prendre $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) (Question facultative) Donner un exemple pour lequel les vecteurs propres de A ne sont pas vecteurs propres de B_J.

Corrigé – On peut prendre le même exemple que celui la question 7b. Il suffit en fait de remarquer que pour une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non symétrique il n'existe pas de base orthornomée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de cette matrice.