Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique et optimisation
Examen du 11 janvier 2018

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 24 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20.

Exercice 1 (Méthode de Newton, barème 8 points)**.**
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{x^2-y^2}{2}$$

et on s'intéresse dans cet exercice aux solutions du problème :

$$Df(x,y) = 0. \tag{1}$$

1. **[1 point]** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^4$. Calculer ses matrices jacobiennes et hessiennes.

   Corrigé – *La fonction f est un polynôme à deux varaibles, elle est donc de classe C^∞.*
   La matrice jacobienne est en tout point un élément de $\mathcal{M}_{1,2}$. Elle s'écrit
   $$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} x^3-3xy^2+x & y^3-3x^2y-y \end{bmatrix}.$$
   La matrice hessienne est en tout point un élément de $\mathcal{M}_{2,2}$. Elle s'écrit
   $$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2-3y^2+1 & -6xy \\ -6xy & 3y^2-3x^2-1 \end{bmatrix}.$$

2. **[2 point]** Déterminer l'ensemble des points critiques de f et donner leur nature (minimum, maximum, point selle).

   Corrigé – *$J_f(x,y) = 0$ si et seulement si $x(x^2-3y^2+1) = 0$ et $y(y^2-3x^2-1) = 0$.*
   Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a donc $J_f(x,y) = 0$ si et seulement si $x^2-3y^2+1 = 0$ et $y^2-3x^2-1 = 0$. En additionnant ces deux équations, ceci donne $-2x^2-2y^2 = 0$, ce qui est impossible.
   On a donc $J_f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y \in \{0, 1, -1\}$.
   Pour donner la nature des points critiques, on calcule la matrice hessienne.
   $$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Le point $(0,0)$ est donc un point selle.
   $$H_f(0,1) = H_f(0,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont donc aussi des points selle.

3. **[1 point]** Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le problème (1). Donner l'ensemble des valeurs initiales pour lesquelles la première itération de l'algorithme est bien défini.

   Corrigé –
   Initialisation $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   Itération *Pour tout $n \geq 0$*
   $$\begin{bmatrix} 3x_n^2-3y_n^2+1 & -6x_ny_n \\ -6x_ny_n & 3y_n^2-3x_n^2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1}-x_n \\ y_{n+1}-y_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_n^3-3x_ny_n^2+x_n \\ y_n^3-3x_n^2y_n-y_n \end{bmatrix}.$$
   La trace de la matrice hessienne est en tout point égal à 0. La matrice hessienne (en un point donné) est donc non inversible si et seulement si 0 est l'unique valeur propre de cette matrice. Comme la matrice hessienne est symétrique, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle est donc (en un point donné) non inversible si et seulement si elle est nulle. On remarque alors que $H_f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = \pm\sqrt{3}/3$. la première itération de l'algorithme est donc bien défini dés que (x_0, y_0) est différent des points $(0, \pm\sqrt{3}/3)$.

4. **[1 point]** A l'aide des résultats vus en cours, discuter la convergence de l'algorithme au voisinage des solutions de (1).

   Corrigé – *La matrice hessienne de f est inversible aux 3 points critiques de f. Pour chacun de ces points il existe donc un voisinage de ce point tel que la méthode de de Newton converge (vers ce point critique de f) dés que l'initialisation de l'algorithme est prise dans ce voisinage.*

5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 = 0$.

   (a) **[1 point]** Montrer que pour tout $n \geq 0$, la suite $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme de Newton Ã partir du choix initial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ vérifie $y_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $x_{n+1} = g(x_n)$, où g est une fonction que l'on explicitera.

   Corrigé – *On nmontre par récurrence que $y_n = 0$ pour tout n. En effet, si $y_n = 0$, on a alors*

   $$\begin{bmatrix} 3x_n^2+1 & 0 \\ 0 & -3x_n^2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1}-x_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_n^3+x_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   On en déduit bien $y_{n+1} = 0$ et on en déduit aussi $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3+x_n}{3x_n^2+1} = \dfrac{2x_n^3}{3x_n^2+1}$.

   Ceci donne $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = \dfrac{2x^3}{3x^2+1}$.

   (b) **[2 point]** Etudier la convergence de la suite $(x_n)_n$ (on pourra distinguer les cas $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$ et montrer que la suite $(x_n)_n$ est monotone).

   Corrigé – *Pour tout $x > 0$, on a $0 < g(x) < x$ (car $2x^2 < 3x^2+1$). Si $x_0 > 0$, on a donc $x_n > 0$ pour tout n et $x_{n+1} < x_n$ pour tout n. On en déduit qu'il existe $l \geq 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$. Puis, comme $l = g(l)$, on a nécessairement $l = 0$.*
   Un raisonnement analogue donne que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $x_0 < 0$ et converge aussi vers 0.
   Enfin, si $x_0 = 0$, on a $x_n = 0$ pour tout n. On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ quelquesoit x_0.

Exercice 2 (Déterminant d'une matrice sous forme de blocs, barème 6 points)**.**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n > 1)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la matrice $\bar{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie sous forme de blocs de la manière suivante :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^t & \lambda \end{bmatrix} \tag{2}$$

On montre dans cet exercice que les deux assertions suivantes sont, sauf cas particuliers, fausses :

A1 $\det(\bar{A}) = \lambda \det(A) - \det(bc^t)$,

A2 $\det(\bar{A}) = \lambda \det(A) - c^t\, b$,

1. Dans cette question, on prend $n \geq 2$, $A = 0$, $b = c$ et on suppose que $b \neq 0$.

   (a) **[2 points]** Montrer que $\mathrm{rg}(\bar{\mathrm{A}}) \leq 2$ et en déduire que $\bar{A}$ n'est pas inversible.

   Corrigé – *Les n premières colonnes de $\bar{\mathrm{A}}$ sont colinéaires au dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'image de $\bar{A}$ est donc incluse dans l'espace vectoriel engendré par le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et la dernière colonne de $\bar{\mathrm{A}}$. On a donc $\mathrm{rg}(\bar{\mathrm{A}}) = \dim(\mathrm{Im}(\bar{\mathrm{A}})) \leq 2$.*
   Le théorème de rang donne alors $\dim(\mathrm{Ker}(\bar{A})) = n+1-\dim(\mathrm{Im}(\bar{A})) \geq n-1 > 0$ et donc $\bar{A}$ n'est pas inversible.

   (b) **[1 points]** En déduire que l'assertion A2 est fausse pour cet exemple.

Corrigé – *Pour cet exemple, on a* $\det(\bar{A}) = \lambda \det(A) = 0$ *mais* $c^t b = b \cdot b \neq 0$*. L'assertion A2 est donc fausse pour cet exemple.*

2. Dans cette question, on suppose que A est symétrique définie positive, $\lambda = 0$, $b = c$ et que $b \neq 0$.

   (a) **[2 points]** Montrer que $\bar{A}$ est inversible et que $\mathrm{rg}(\mathrm{bb}^{\mathrm{t}}) = 1$.

   Corrigé – *Soient* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $\begin{bmatrix} A & b \\ b^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*. Ceci donne* $Ax + yb = 0$ *et* $b \cdot x = 0$*. En prenant le produit scalaire de la première équation avec* x*, on obtient, avec la deuxième équation,*

   $$0 = (Ax + yb) \cdot x = Ax \cdot x.$$

   Comme A *est s.d.p., ceci donne* $x = 0$*. On a alors aussi* $yb = 0$ *et donc* $y = 0$ *(car* $b \neq 0$*). On a ainsi prouvé que* $\bar{A}$ *était inversible (et donc* $\det(\bar{A}) \neq 0$*).*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*, on a* $bb^t x = (b \cdot x)b$*. Ceci montre que* $\mathrm{Im}(bb^t) = \{\alpha b, \alpha \in \mathbb{R}\}$*, et donc* $\mathrm{rg}(\mathrm{bb}^{\mathrm{t}}) = 1$ *(car* $b \neq 0$*).*

   (b) **[1 points]** En déduire que l'assertion A1 est fausse pour cet exemple.

   Corrigé – *Comme* $n > 1$*, le théorème du rang donne* $\dim(\mathrm{Ker}(bb^t)) = n - \mathrm{rg}(\mathrm{bb}^{\mathrm{t}}) = \mathrm{n} - 1 > 0$ *et donc* $\det(bb^t) = 0$*. Comme* $\lambda = 0$*, on a donc* $\lambda \det(A) - \det(bc^t) = 0$*. Mais* $\det(\bar{A}) \neq 0$*, L'assertion A1 est donc fausse pour cet exemple.*

Exercice 3 (Minimisation avec contrainte, barème 10 points)**.**
Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement convexe et que

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{3}$$

Pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = x_2 - \varphi(x_1)$.
On pose $K = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = 0\}$ et on cherche à calculer une solution $\bar{x}$ du problème :

$$\bar{x} \in K, \tag{4}$$

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in K. \tag{5}$$

1. **[2 points]** Montrer qu'il existe $\bar{x}$ solution de (4)-(5).
   En prenant un exemple, montrer que le problème (4)-(5) peut avoir plusieurs solutions.
   [On pourra, par exemple, prendre $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ et $\varphi(s) = s^2 - 1$.]

   Corrigé – *Comme* φ *est continue, l'ensemble* K *est fermé. L'existence de* $\overline{x}$ *découle alors de la continuité de* f*, de l'hypothèse* (3) *et du fait que* K *est non vide et fermé.*
   Pour avoir un exemple de non unicité, on considère le cas $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ *et* $\varphi(s) = s^2 - 1$*. Soit* $\overline{x}$ *solution de* (4)-(5)*. On note* $\bar{x}_1$ *et* $\bar{x}_2$ *les composantes de* $\bar{x}$*. Si* $\bar{x}_1 \neq 0$*, on remarque que* $f(x) = f(\bar{x})$ *avec* x *dont les composantes sont* $-\bar{x}_1$ *et* $\bar{x}_2$*, ce qui prouve la non unicité du point où* f *réalise son minimum sur* K*. Si* $\bar{x}_1 = 0$*, on a alors* $\bar{x}_2 = -1$ *et* $f(\bar{x}) = 1$*. Dans ce cas, on a aussi* $f(x) = f(\bar{x})$*, avec* x *dont les composantes sont* 1 *et* 0*, ce qui prouve aussi la non unicité du point où* f *réalise son minimum sur* K*.*
   [En fait, on peut montrer ici que $\bar{x}_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$*.]*

2. **[2 points]** Soit $\bar{x}$ solution de (4)-(5). Calculer le rang de la matrice jabobienne de g au point $\bar{x}$. Peut-on appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange à ce problème de minimisation ? Si oui, que donne-t-il ?

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}^2$. La matrice Jacobienne de g au point x est $\begin{bmatrix}\varphi'(x_1) & 1\end{bmatrix}$ (c'est un élément de $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$). On peut donc appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange à ce problème de minimisation. Il donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla g(\bar{x}) = 0.$$

Ceci peut aussi sécrire

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) - \lambda \varphi'(\bar{x}_1) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) + \lambda = 0.$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose $h(z) = f(z, \varphi(z))$.

3. Soit $\bar{x} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix}$.

   (a) **[1 point]** Montrer que $\bar{x}$ est solution de (4)-(5) si et seulement si $\bar{x}_2 = \varphi(\bar{x}_1)$ et $h(\bar{x}_1) \le h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

   Corrigé – *Si $\bar{x}$ est solution de (4)-(5), on a bien $\bar{x}_2 = \varphi(\bar{x}_1)$ (car $\bar{x} \in K$) et $h(\bar{x}_1) \le h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ car $h(\bar{x}_1) = f(\bar{x})$ et $h(z) = f(z, \varphi(z))$ et $(z, \varphi(z)) \in K$.*

   (b) **[1 point]** On suppose que $\bar{x}$ est solution de (4)-(5). Retrouver le résultat du théorème des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (4)-(5) en utilisant que fait que h réalise son minimum (sur $\mathbb{R}$) au point $\bar{x}_1$.

   Corrigé – *Comme h réalise son minimum (sur $\mathbb{R}$) au point $\bar{x}_1$ et que h est de classe C^1, on a $h'(\bar{x}_1) = 0$, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})\varphi'(\bar{x}_1) = 0$, ce qui est bien le résultat du théorème des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (4)-(5).*

4. **[1 point]** Donner l'algorithme du gradient à pas fixe pour calculer un point où h réalise son minimum. On note ρ le pas fixe de cet algorithme.

   Corrigé – *Soit $\rho > 0$, l'algorithme est le suivant.*
   Initialisation $z_0 \in \mathbb{R}$,
   Itérations *Pour tout $k \ge 0$, $z_{k+1} = z_k - \rho(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z_k, \varphi(z_k)) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(z_k, \varphi(z_k))\varphi'(z_k))$.*

5. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On suppose maintenant que $\varphi(s) = as$ pour tout $s \in \mathbb{R}$).

   (a) **[1 point]** Montrer qu'il existe un unique $\bar{x}$ solution de (4)-(5).

   Corrigé – *L'unicité découle du fait que f est strictement convexe et K convexe.*

   (b) **[2 points]** Donner l'algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K pour calculer le point $\bar{x}$ où f réalise son minimum sur K. On note $\bar{\rho}$ le pas de cet algorithme et $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par cet algorithme.
   Montrer que la suite formée avec, pour tout n, la première composante de $x^{(n)}$ est solution de l'algorithme de la question 4 avec un pas ρ que l'on calculera en fonction de $\bar{\rho}$ et a.

   Corrigé – *L'ensemble K est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, la projection sur K de x est donc le point de K, noté y tel que $(x - y) \cdot z = 0$ pour tout $z \in K$. En utilisant la notation habituelle pour les composantes de x et y, le point y est donc défini par $y_2 = ay_1$ et $(x_1 - y_1) + a(x_2 - y_2) = 0$, c'est-à-dire*

   $$y_1 = \frac{x_1 + ax_2}{1 + a^2},\ y_2 = ay_1.$$

   L'algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K s'écrit donc
   Initialisation $x^{(0)} \in K$,

Itérations *Pour tout $k \geq 0$,*

$$\tilde{x}_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \bar{\rho}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(k)}),\ \tilde{x}_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \bar{\rho}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(k)}),$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{\tilde{x}_1^{(k+1)} + a\tilde{x}_2^{(k+1)}}{1+a^2},\ x_2^{(k+1)} = ax_1^{(k+1)}.$$

Comme $x_2^{(k)} = ax_1^{(k)}$. Ceci donne, pour la première composante de x^k,

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\bar{\rho}}{1+a^2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(k)}) + a\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(k)})).$$

On retrouve ainsi l'algorithme de la question 4 avec $\rho = \frac{\bar{\rho}}{1+a^2}$.