Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1$^{\text{er}}$ semestre ☐ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques
Code du module : SMI301-102 Libellé du module : Analyse numérique et optimisation
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI, notes de Cours/TD/TP

Exercice 1 : Méthode de Newton. [8 points]

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2}$$

et on s'intéresse dans cet exercice aux solutions du problème :

$$Df(x,y) = 0. \tag{$\mathcal{P}$}$$

1. **[1 point]** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^4$. Calculer ses matrices jacobiennes et hessiennes.
2. **[2 points]** Déterminer l'ensemble des points critiques de f et donner leur nature (minimum, maximum, point selle).
3. **[1 point]** Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$. Donner l'ensemble des valeurs initiales pour lesquelles la première itération de l'algorithme est bien défini.
4. **[1 point]** A l'aide des résultats vus en cours, discuter la convergence de l'algorithme au voisinage des solutions de $(\mathcal{P}\ )$.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 = 0$.
   (a) **[1 point]** Montrer que pour tout $n \geq 0$, la suite $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme de Newton à partir du choix initial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ vérifie $y_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $x_{n+1} = g(x_n)$, où g est une fonction que l'on explicitera.
   (b) **[2 points]** Etudier la convergence de la suite $(x_n)_n$ (on pourra distinguer les cas $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$ et montrer que la suite $(x_n)_n$ est monotone).

Exercice 2 : Déterminant d'une matrice sous forme de blocs. [6 points]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n > 1)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la matrice $\bar{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie sous forme de blocs de la manière suivante :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^t & l \end{bmatrix} \tag{1}$$

On montre dans cet exercice que les deux assertions suivantes sont, sauf cas particuliers, fausses :
A1 $\det(\bar{A}) = l\det(A) - \det(bc^t)$,
A2 $\det(\bar{A}) = l\det(A) - c^t\, b$,

1. Dans cette question, on prend $n \geq 2$, $A = 0$, $b = c$ et on suppose que $b \neq 0$.
   (a) **[2 points]** Montrer que $\mathrm{rg}(\bar{\mathrm{A}}) \leq 2$ et en déduire que $\bar{A}$ n'est pas inversible.
   (b) **[1 points]** En déduire que l'assertion A2 est fausse pour cet exemple.
2. Dans cette question, on suppose que A est symétrique définie positive, $l = 0$, $b = c$ et que $b \neq 0$.
   (a) **[2 points]** Montrer que $\bar{A}$ est inversible et que $\mathrm{rg}(\mathrm{bb^t}) = 1$.
   (b) **[1 points]** En déduire que l'assertion A1 est fausse pour cet exemple.

Exercice 3 : Minimisation avec contrainte. [10 points]

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement convexe et que

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = x_2 - \varphi(x_1)$.
On pose $K = \{x \in \mathbb{R}^2,\, g(x) = 0\}$ et on cherche à calculer une solution $\bar{x}$ du problème :

$$\bar{x} \in K, \tag{2}$$
$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in K. \tag{3}$$

1. **[2 points]** Montrer qu'il existe $\bar{x}$ solution de (2)-(3).
   En prenant un exemple, montrer que le problème (2)-(3) peut avoir plusieurs solutions.
   Pour cette question, on pourra prendre par exemple $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ et $\varphi(s) = s^2 - 1$.
2. **[2 points]** Soit $\bar{x}$ solution de (2)-(3). Calculer le rang de la matrice jabobienne de g au point $\bar{x}$. Peut-on appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange à ce problème de minimisation ? Si oui, que donne-t-il ?

Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose $h(z) = f(z, \varphi(z))$.

3. Soit $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$.
   (a) **[1 point]** Montrer que $\bar{x}$ est solution de (2)-(3) si et seulement si $\bar{x}_2 = \varphi(\bar{x}_1)$ et $h(\bar{x}_1) \leq h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
   (b) **[1 point]** On suppose que $\bar{x}$ est solution de (2)-(3). Retrouver le résultat du théorème des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (2)-(3) en utilisant que fait que h réalise son minimum (sur $\mathbb{R}$) au point $\bar{x}_1$.
4. **[1 point]** Donner l'algorithme du gradient à pas fixe pour calculer un point où h réalise son minimum. On note ρ le pas fixe de cet algorithme.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On suppose maintenant que $\varphi(s) = as$ pour tout $s \in \mathbb{R}$).
   (a) **[1 point]** Montrer qu'il existe un unique $\bar{x}$ solution de (2)-(3).
   (b) **[2 points]** Donner l'algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K pour calculer le point $\bar{x}$ où f réalise son minimum sur K. On note $\bar{\rho}$ le pas de cet algorithme et $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par cet algorithme.
   Montrer que la suite formée avec, pour tout n, la première composante de $x^{(n)}$ est solution de l'algorithme de la question 4 avec un pas ρ que l'on calculera en fonction de $\bar{\rho}$ et a.