Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

**Année universitaire 2017/2018**

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques
Code du module : SMI301-102 Libellé du module : Analyse numérique et optimisation
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI, notes de Cours/TD/TP

---

**Examen de juin 2018**

L'examen contient 2 exercices. Le barème est sur 22 points

**Exercice 1** (Matrice à inverse positive, barème 16 points)**.**
**Notations :**
*On rappelle que si $x \in \mathbb{R}^n$, la notation $x \geq 0$ signifie que toutes les composantes de $x$ (notées $x_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$) sont positives et la notation $x > 0$ signifie que toutes les composantes de $x$ sont strictement positives. On note $e$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.*
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ and $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de $A$ correspondant à la ligne $i$ et la colonne $j$.

1. On suppose que $A$ vérifie la condition suivante :
$$a_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$$
$$a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{i,j} > 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
   (a) Montrer que
$$x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0. \tag{1}$$
   [On pourra considérer $i_0$ tel que $x_{i_0} \leq x_i$ pour tout $i$ et montrer que $x_{i_0} \geq 0$.]
   (b) Montrer que $A$ est inversible et que tous les coefficients de $A^{-1}$ sont positifs.
   (c) Montrer que
$$x \in \mathbb{R}^n,\ Ax > 0 \Rightarrow x > 0, \tag{2}$$
2. On suppose maintenant que $A$ vérifie la condition suivante :
$$a_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$$
$$a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{j,i} > 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
   Montrer que $A$ vérifie aussi (1) et (2).
3. On suppose maintenant que $A$ vérifie la condition suivante :
$$a_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$$
$$a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{j,i} = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
   On suppose aussi que $A$ vérifie la propriété suivante :
$$I, J \subset \{1, \ldots, n\}, I \neq \emptyset, J \neq \emptyset,\ I \cap J = \emptyset,\ I \cup J = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \exists (i,j) \in I \times J \text{ tel que } a_{i,j} \neq 0. \tag{3}$$
   (a) Montrer que $A$ n'est pas inversible. Donner explicitement un élément non nul de $\mathrm{Ker}(A^t)$.
   (b) Soit $f \in \mathrm{Ker}(A)$. On note $f_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, les composantes de $f$.
      i. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i}|f_i| \leq \sum_{j \neq i}(-a_{i,j})|f_j|$.
      ii. Montrer que les composantes de $f$ ont toutes le même signe. [Utiliser (3)].
      iii. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

   On se donne $\alpha > 0$. On définit la matrice $B$ (par bloc) en posant $B = \begin{bmatrix} A & e \\ e^t & 0 \end{bmatrix}$.
   (c) Montrer que $B$ est inversible.
   (d) Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = 0$ et $e \cdot x = \alpha$. Montrer que $x \geq 0$. Montrer que l'unique solution du système linéaire $By = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ est $y = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Exercice 2** (Optimisation, barème 6 points)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique définie positive,* $b \in \mathbb{R}^n$*,* $c \in \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application définie pour* $x \in \mathbb{R}^N$ *par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax - x \cdot b + c\,.$$

*Ici* $u \cdot v$ *est le produit scalaire canonique entre* $u \in \mathbb{R}^n$ *et* $v \in \mathbb{R}^n$*. On note* $|\cdot|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $\|\cdot\|_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *la norme matricielle induite sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

1. *Montrer que* $f$ *est de classe* $\mathrm{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*. Donner son gradient, sa hessienne et sa différentielle* $3$*-ième.*
2. *Montrer que*

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|_2^2\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\,,$$
$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)|_2 \leq M |x - y|_2\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\,,$$

   *où* $\alpha > 0$ *est la plus petite valeur propre de* $A$ *et* $M > 0$ *son rayon spectral.*
3. *Montrer que* $f$ *est strictement convexe et que* $\lim_{|x|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty$*. En déduire que* $f$ *admet un unique minimum* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$*. Donner sa valeur.*
4. *En utilisant le point 2, montrer que* $h : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x - \rho \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ *est strictement contractante pour* $\rho \in ]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$*. En déduire que la suite*

$$x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n)\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

   *converge vers* $\overline{x}$ *pour* $x_0 \in \mathbb{R}^N$*.*
5. *Montrer que*

$$x_{n+1} - \overline{x} = (\mathrm{Id} - \rho A)(x_n - \overline{x})\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

   *En déduire que la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $\overline{x}$ *dès que* $\rho \in ]0, \frac{2}{M}[$*.*
6. *Quel est le nom de l'algorithme des questions précédentes ?*