Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
Partiel du 25 octobre 2017

La partiel contient 4 exercices. Le barème est sur 27 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20…

Exercice 1 (Décompositions LU et de Choleski, barème 6 points)**.**
Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{bmatrix}$.

1. Calculer les mineurs principaux de M. En déduire que M admet des décompositions LU et de Choleski.
2. Donner la décomposition LU de M.
3. Donner la décomposition de Choleski de M.

Exercice 2 (Système avec plus d'inconnues que d'équation, barème 3 points)**.**
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $p > n \geq 1$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose qu'il existe au moins un vecteur x de $\mathbb{R}^p$ tel que $Ax = b$. Montrer qu'il existe alors une infinité de vecteurs x de $\mathbb{R}^p$ tel que $Ax = b$.
2. Donner un exemple avec $n = 2$ et $p = 3$ pour lequel il n'existe pas de vecteur x de $\mathbb{R}^p$ tel que $Ax = b$.

Exercice 3 (Vitesse de convergence pour la méthode de Jacobi, barème 8 points)**.**
Soient A une matrice carrée d'ordre n, inversible, et $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A. On suppose que D est inversible et on note B_J la matrice des itérations de la méthode de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E + F)$. On rappelle que la méthode de Jacobi s'écrit
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
Itérations : pour tout $k \geq 0$, $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$.
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note ρ le rayon spectral de B_J.

1. On suppose que B_J est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de B_J). Montrer qu'il existe $C > 0$, dépendant de A, b, $x^{(0)}$ et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, mais indépendant de k, telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| \leq C\rho^k \text{ pour tout } k \geq 0.$$
2. On ne suppose plus que B_J est diagonalisable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$, dépendant de A, b, $x^{(0)}$, ε et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, mais indépendant de k, telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| \leq C_\varepsilon(\rho + \varepsilon)^k \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Dans la suite de cet exercice on prend $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Dans cette question, on choisit, pour norme dans $\mathbb{R}^2$, la norme euclidienne, c'est-à-dire $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Montrer qu'il existe C (dépendant de b et $x^{(0)}$, mais non de k) telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| = C\rho^k \text{ pour tout } k \geq 0. \tag{1}$$
4. Montrer qu'il existe des normes dans $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles la conclusion de la question 3 est fausse (c'est-à-dire pour lesquelles la suite $(\|x^{(k)} - \overline{x}\|/\rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite constante sauf éventuellement pour des valeurs particulières de $x^{(0)}$).

Exercice 4 (Méthode de la puissance, barème 10 points)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On rappelle que la méthode de la puissance consiste à construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
Initialisation $x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{|y^{(0)}|} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
Itérations pour $k \geq 0$, si $Ax^{(k)} \neq 0$, $x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{|Ax^{(k)}|}$
où $|x|$ désigne la norme euclidienne du vecteur x.
En définissant la suite $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $y^{(k)} = A^k y^{(0)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque que, si $y^{(k)} \neq 0$ pour tout k,

$$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{|y^{(k)}|}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On note $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$.
   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   On utilise la méthode de la puissance avec $y^{(0)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $\alpha_2 \neq 0$.

   (b) Montrer que la méthode de la puissance définit bien une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et que $x^{(k)}$ est, pour tout $k \in \mathbb{N}$, colinéaire au vecteur $(\alpha_1 + k\alpha_2\mu/\lambda)e_1 + \alpha_2 e_2$.
   (c) Calculer $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$ et $\lim_{k\to+\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$.
   (d) Peut-on appliquer le théorème vu en cours sur la méthode de la puissance à cette matrice ?
2. Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ avec $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda > |\mu|$, $\gamma \neq 0$.
   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   On utilise la méthode de la puissance avec $y^{(0)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, $\alpha_1 \neq 0$.

   (b) Montrer que la méthode de la puissance définit bien une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
   (c) Calculer $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$ et $\lim_{k\to+\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$.
   (d) Peut-on appliquer le théorème vu en cours sur la méthode de la puissance à cette matrice ?