Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
SMI6U01TL. Examen du 9 mai 2019

L'examen contient 2 exercices. Le barème est sur 22 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20... Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.
Notation : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel de x avec y.

Exercice 1 (Meilleure approximation d'une fonction par un polynôme en norme infinie, barème 12 points)**.**
Soit $f(x) = \sin(\pi x)$. On considère le problème suivant

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)|. \tag{1}$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $z \in [0, 1]$ tel que
$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| = |f(z) - az(1-z)|. \tag{2}$$
2. Montrer que pour $a \notin [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$, on a
$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| = |1 - \frac{a}{4}|. \tag{3}$$
[On pourra étudier la fonction $x \mapsto f(x) - ax(1-x)$ pour $x \in [0, 1]$.]
Quelle valeur pour z vérifiant (2) peut-on prendre dans le cas où $a \in \mathbb{R} \setminus [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$?
3. On définit $\phi : a \to \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)|$.
Montrer que ϕ est coercive (c'est-à-dire que $\phi(a) \to +\infty$ quand $|a| \to +\infty$).
4. Question hors barème : montrer que ϕ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. Montrer qu'il existe $b \in [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$ tel que
$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - bx(1-x)|.$$
6. Montrer que
$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| \leq |1 - \frac{\pi}{4}|.$$
7. Est-ce que (3) est valable pour tout $a \in \mathbb{R}$?
8. On considère la méthode du gradient à pas constant pour résoudre le problème d'optimisation (1).
   (a) On suppose que la valeur initiale $a_0 \notin [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$. Montrer que lorsque le pas (constant) est suffisamment petit mais non nul (on explicitera la valeur de ce pas), il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :
   - les itérées $a_1, \ldots, a_k$ de la méthode du gradient à pas constant sont bien définies,
   - $a_k \in [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$.

   (b) Montrer que pour $\rho > \rho_m$ (déterminer explicitement ρ_m) il existe une infinité d'intervalles disjoints de longueur strictement positive, notés I_n, $n \in \mathbb{Z}$, tel que pour $a_0 \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ déterminée par l'algorithme du gradient à pas fixe (le pas étant ρ) est bien définie et a_k est en dehors de l'intervalle $[\pi, \pi^2/2]$ pour tout k. En déduire que pour un tel choix de ρ la méthode ne converge pas.

Exercice 2 (Calcul d'une valeur propre et d'un vecteur propre par Newton, barème 10 points)**.**
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \det(A + \lambda B)$.

1. Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

   Corrigé – *Les coefficients de $(A + \lambda B)$ sont des polynôme (en λ) de degré 0 ou 1. Comme de déterminant de $(A+\lambda B)$ est la somme de produits de n coefficients, on obtient bien que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.*

2. On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}B \neq \{0\}$. Montrer que P est le polynôme nul.

   Corrigé – *Pour tout λ, $\mathrm{Ker}(A + \lambda B) \supset \mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}B \neq \{0\}$ et donc $P(\lambda) = \det(A + \lambda B) = 0$.*

Dans toute la suite, on suppose que A et B sont des matrices symétriques et que $\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}B = \{0\}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\dim \mathrm{Ker}(A + \lambda B) = 1$. On suppose que $Bv \cdot v \neq 0$ pour $v \in \mathrm{Ker}(A + \lambda B)$, $v \neq 0$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(A + \lambda B)$ tel que $Bu \cdot u = 1$. On cherche à calculer le couple (λ, u) par la méthode de Newton. Pour cela, on définit la fonction G de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$G(\begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} Av + \mu Bv \\ Bv \cdot v - 1 \end{bmatrix} \text{ pour } v \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Pour $v \in \mathbb{R}^n$ $\mu \in \mathbb{R}$, donner la matrice jacobienne de G au point $\begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}$ sous forme de blocs, avec 4 matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $M_{1,1}(\mathbb{R})$.
   Cette matrice jacobienne est notée ensuite $J_G(v, \mu)$ (elle appartient à $M_{n+1}(\mathbb{R})$)

   Corrigé – *La dérivation de G donne $J_G(v, \mu) = \begin{bmatrix} A + \mu B & Bv \\ 2v^t B & 0 \end{bmatrix}$.*
   On a bien $A + \mu B \in M_n(\mathbb{R})$, $Bv \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $2v^t B \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $0 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$.

4. La fonction J_G (de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $M_{n+1}(\mathbb{R})$) est-elle continue, de classe C^1, de classe C^2, ... de classe C^∞ ?

   Corrigé – *La fonction J_G est de classe C^∞.*

5. Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $J_G(u, \lambda) \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Montrer que $Av + \lambda Bv + \mu Bu = 0$. En déduire que $\mu = 0$.[utiliser la symétrie de A et B.]
   Montrer que $v = 0$. [Utiliser $\dim \mathrm{Ker}(A + \lambda B) = 1$.]

   Corrigé – $J_G(u, \lambda) \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \lambda B & Bu \\ 2u^t B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + \lambda Bv + \mu Bu \\ 2u^t Bv \end{bmatrix}$.
   On a donc $Av + \lambda Bv + \mu Bu = 0$ et $2u^t Bv = 0$.
   En prenant le produit scalaire de la première équation avec u et en utilisant la symétrie de A et B, on a donc

   $$0 = (Av + \lambda Bv + \mu Bu) \cdot u = (Av + \lambda Bv) \cdot u + \mu Bu \cdot u = v \cdot (Au + \lambda Bu) + \mu Bu \cdot u.$$

   Comme $Au + \lambda Bu = 0$ et $Bu \cdot u = 1$, on en déduit que $\mu = 0$.
   On a donc aussi $Av + \lambda Bv = 0$. Comme $\dim \mathrm{Ker}(A + \lambda B) = 1$, on en déduit que v est colinéaire à u, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $v = \gamma u$. De l'équation $2u^t Bv = 0$, on déduit alors que $\gamma u^t Bu = \gamma Bu \cdot u = 0$ et donc $\gamma = 0$. ce qui donne $v = 0$.

6. On considère l'algorithme de Newton pour calculer le couple (u, λ). Cet algorithme s'écrit
Initialisation $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.
Itérations pour $k \geq 0$, u_k et λ_k donnés, on calcule (si c'est possible) (u_{k+1}, λ_{k+1}) solution de
$$J_G(u_k, \lambda_k) \begin{bmatrix} u_{k+1} - u_k \\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Au_k + \lambda_k B u_k \\ Bu_k \cdot u_k - 1 \end{bmatrix}.$$
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|u_0 - u\|_2 \leq \varepsilon$ et $|\lambda_0 - \lambda| \leq \varepsilon$, la suite $(u_k, \lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie (c'est-à-dire que la matrice $J_G(u_k, \lambda_k)$ est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$) et converge, quand $k \to +\infty$, vers (u, λ).

   Corrigé – *La question précédente donne que $J_G(u, \lambda)$ est une matrice inversible. Comme G est une fonction de classe C^∞, cette questionn est alors une conséquence immédiate d'un théorème du cours.*

7. (Question indépendante des questions précédentes) On suppose que A ou B est s.d.p. Montrer que les racines de P sont nécessairement réelles.

   Corrigé – *Si C est une matrice symétrique à coefficients réels, on a alors $Cu \cdot \bar{u} \in \mathbb{R}$ pour tout $u \in \mathbb{C}^n$ (où $\bar{u}$ désigne la vecteur conjugué de u). Si C est de plus $s.d.p$ on a même $Cu \cdot \bar{u} > 0$ pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$.*
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P et $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$ tel que $Au + \lambda Bu = 0$. On a alors $(Au + \lambda Bu) \cdot \bar{u} = 0$ Comme A et B sont s.d.p., $Au \cdot \bar{u}$ et $Bu \cdot \bar{u}$ sont des réels strictement positifs. Ceci donne que λ est un réel strictement négatif.