

**Université de Marseille**  
**Licence de Mathématiques, 3<sup>ème</sup> année, analyse numérique et optimisation**  
**SMI6U01TL. Examen du 9 mai 2019**

L'examen contient 2 exercices. Le barème est sur 22 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20... Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.

Notation : pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ),  $x \cdot y$  désigne le produit scalaire usuel de  $x$  avec  $y$ .

**Exercice 1** (Meilleure approximation d'une fonction par un polynôme en norme infinie, barème 12 points).  
Soit  $f(x) = \sin(\pi x)$ . On considère le problème suivant

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)|. \quad (1)$$

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $z \in [0, 1]$  tel que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| = |f(z) - az(1-z)|. \quad (2)$$

2. Montrer que pour  $a \notin [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$ , on a

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| = |1 - \frac{a}{4}|. \quad (3)$$

[On pourra étudier la fonction  $x \mapsto f(x) - ax(1-x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .]

Quelle valeur pour  $z$  vérifiant (2) peut-on prendre dans le cas où  $a \in \mathbb{R} \setminus [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$  ?

3. On définit  $\phi : a \rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)|$ .

Montrer que  $\phi$  est coercive (c'est-à-dire que  $\phi(a) \rightarrow +\infty$  quand  $|a| \rightarrow +\infty$ ).

4. Question hors barème : montrer que  $\phi$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

5. Montrer qu'il existe  $b \in [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$  tel que

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - bx(1-x)|.$$

6. Montrer que

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - ax(1-x)| \leq |1 - \frac{\pi}{4}|.$$

7. Est-ce que (3) est valable pour tout  $a \in \mathbb{R}$  ?

8. On considère la méthode du gradient à pas constant pour résoudre le problème d'optimisation (1).

(a) On suppose que la valeur initiale  $a_0 \notin [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$ . Montrer que lorsque le pas (constant) est suffisamment petit mais non nul (on explicitera la valeur de ce pas), il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- les itérées  $a_1, \dots, a_k$  de la méthode du gradient à pas constant sont bien définies,
- $a_k \in [\pi, \frac{\pi^2}{2}]$ .

(b) Montrer que pour  $\rho > \rho_m$  (déterminer explicitement  $\rho_m$ ) il existe une infinité d'intervalles disjoints de longueur strictement positive, notés  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , tel que pour  $a_0 \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ , la suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  déterminée par l'algorithme du gradient à pas fixe (le pas étant  $\rho$ ) est bien définie et  $a_k$  est en dehors de l'intervalle  $[\pi, \pi^2/2]$  pour tout  $k$ . En déduire que pour un tel choix de  $\rho$  la méthode ne converge pas.

**Exercice 2** (Calcul d'une valeur propre et d'un vecteur propre par Newton, barème 10 points).

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $P(\lambda) = \det(A + \lambda B)$ .

1. Montrer que  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ .
2. On suppose dans cette question que  $\text{Ker}A \cap \text{Ker}B \neq \{0\}$ . Montrer que  $P$  est le polynôme nul.

Dans toute la suite, on suppose que  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques et que  $\text{Ker}A \cap \text{Ker}B = \{0\}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\dim \text{Ker}(A + \lambda B) = 1$ . On suppose que  $Bv \cdot v \neq 0$  pour  $v \in \text{Ker}(A + \lambda B)$ ,  $v \neq 0$ . Soit  $u \in \text{Ker}(A + \lambda B)$  tel que  $Bu \cdot u = 1$ . On cherche à calculer le couple  $(\lambda, u)$  par la méthode de Newton. Pour cela, on définit la fonction  $G$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par

$$G\left(\begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Av + \mu Bv \\ Bv \cdot v - 1 \end{bmatrix} \text{ pour } v \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Pour  $v \in \mathbb{R}^n$   $\mu \in \mathbb{R}$ , donner la matrice jacobienne de  $G$  au point  $\begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}$  sous forme de blocs, avec 4 matrices appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $M_{1,n}(\mathbb{R})$  et  $M_{1,1}(\mathbb{R})$ .

Cette matrice jacobienne est notée ensuite  $J_G(v, \mu)$  (elle appartient à  $M_{n+1}(\mathbb{R})$ )

4. La fonction  $J_G$  (de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $M_{n+1}(\mathbb{R})$ ) est-elle continue, de classe  $C^1$ , de classe  $C^2$ , ... de classe  $C^\infty$  ?

5. Soient  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que  $J_G(u, \lambda) \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Montrer que  $Av + \lambda Bv + \mu Bu = 0$ . En déduire que  $\mu = 0$ . [utiliser la symétrie de  $A$  et  $B$ .]

Montrer que  $v = 0$ . [Utiliser  $\dim \text{Ker}(A + \lambda B) = 1$ .]

6. On considère l'algorithme de Newton pour calculer le couple  $(u, \lambda)$ . Cet algorithme s'écrit

**Initialisation**  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ .

**Itérations** pour  $k \geq 0$ ,  $u_k$  et  $\lambda_k$  donnés, on calcule (si c'est possible)  $(u_{k+1}, \lambda_{k+1})$  solution de

$$J_G(u_k, \lambda_k) \begin{bmatrix} u_{k+1} - u_k \\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Au_k + \lambda_k Bu_k \\ Bu_k \cdot u_k - 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, si  $\|u_0 - u\|_2 \leq \varepsilon$  et  $|\lambda_0 - \lambda| \leq \varepsilon$ , la suite  $(u_k, \lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bien définie (c'est-à-dire que la matrice  $J_G(u_k, \lambda_k)$  est inversible pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ) et converge, quand  $k \rightarrow +\infty$ , vers  $(u, \lambda)$ .

7. (Question indépendante des questions précédentes) On suppose que  $A$  ou  $B$  est s.d.p. Montrer que les racines de  $P$  sont nécessairement réelles.