Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
Partiel du 22 mars 2019

La partiel contient 3 exercices. Le barème est sur 28 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20... Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.
Notation : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel de x avec y. La notation "s.d.p." signifie "symétrique définie positive". Pour une matrice A, $c_i(A)$ désigne la i-ième colonne de A et $l_i(A)$ désigne la i-ième ligne de A.

Exercice 1 (Diagonalisation du produit d'une matrice s.d.p. et d'une matrice symétrique, barème 8 points)**.** On rappelle le théorème suivant, vu en cours :

Théorème 1. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ une matrice symétrique. Alors, il existe $\{f_1, \ldots, f_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $Af_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $f_i \cdot f_j = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ une matrice s.d.p.. On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ donnée par le théorème 1. On définit la matrice P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $c_i(P) = Pe_i = f_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que P est inversible, $P^t = P^{-1}$. On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est diagonale à coefficients diagonaux strictements positifs.
2. On note $\sqrt{D}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines positives des coefficients diagonaux de la matrice D (donnée à la question 1). On pose $C = P\sqrt{D}P^{-1}$, montrer que $C^2 = A$ et que C est s.d.p.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

3. En donnant un exemple pour $n = 2$, montrer que $A^{-1}B$ n'est pas nécessairement symétrique.
4. Montrer que les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont les mêmes que les valeurs propres de $C^{-1}BC^{-1}$ (la matrice C étant donnée à la question 2) et que les sous espaces correspondants sont de même dimension. En déduire que la matrice $A^{-1}B$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Matrice tridiagonale périodique et factorisation périodique, barème 10 points)**.**
Soient $d, u, \ell \in \mathbb{R}$ tels que $d > |u| + |\ell|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tridiagonale périodique : $A_{i,i} = d,\ 1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = u,\ A_{i+1,i} = \ell,\ 1 \leq i \leq (n-1)$, $A_{1,n} = \ell,\ A_{n,1} = u$ et $A_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer qu'il existe des réels α, β et γ tels que $A = \alpha\hat{L}\hat{U}$ avec
   - $\hat{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\hat{L}_{i,i} = 1,\ 1 \leq i \leq n$, $\hat{L}_{i+1,i} = -\beta,\ 1 \leq i \leq (n-1)$, $\hat{L}_{1,n} = -\beta$ et $\hat{L}_{i,j} = 0$ sinon.
   - $\hat{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\hat{U}_{i,i} = 1,\ 1 \leq i \leq n$, $\hat{U}_{i,i+1} = -\gamma,\ 1 \leq i \leq (n-1)$, $\hat{U}_{n,1} = -\gamma$ et $\hat{U}_{i,j} = 0$ sinon.
   - $|\beta| < 1,\ |\gamma| < 1$.

   Trouver $\alpha,\ \beta$ et γ en fonction de $\ell,\ d$ et u.

   Indication : On pourra commencer par remarquer que $l_i(\hat{L})c_j(\hat{U}) = \begin{cases} 1 + \beta\gamma \text{ si } (i, j) = (i, i), \\ -\gamma \text{ si } (i, j) = (i, i+1) \text{ ou } (n, 1), \\ -\beta \text{ si } (i, j) = (i, i-1) \text{ ou } (1, n), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
2. Pour résoudre $Ax = b$, on pose $c = \alpha^{-1}b$ et on résout successivement les deux systèmes suivants (avec les matrices $\hat{L}$ et $\hat{U}$ de la question 1),
$$\begin{cases} \hat{L}y = c \\ \hat{U}x = y. \end{cases}$$

(a) (Calcul de y) Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on note $y_1, \ldots, y_n$ les composantes de y. Montrer que $\hat{L}y = c$ si et seulement si

$$y_i = \sum_{k=1}^{i} c_k \beta^{i-k} + \beta^i y_n \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

[Utiliser une récurrence sur i, i allant de 1 à n.]
En déduire que $\hat{L}$ est inversible et $y_n = (\sum_{k=1}^{n} c_k \beta^{n-k})/(1-\beta^n)$.

(b) On suppose, dans cette question seulement, que $\beta = 1$. Montrer que $\hat{L}$ n'est pas inversible et donner un élément non nul de $\mathrm{Ker}\hat{L}$.

(c) (Calcul de x) Par une technique analogue à celle de la question 2a, montrer que $\hat{U}$ est inversible et calculer x en fonction de y. [On pourra calculer les x_i, i allant de n à 1 en fonction de x_1.]

3. Pour résoudre effectivement le système $Ax = b$ avec la méthode donnée par les questions 1-2, pour calculer y (question 2a) on calcule d'abord les β^i ($1 \leq i \leq n$) et y_n, puis on utilise plutôt la formule $y_i = c_i + \beta y_{i-1}$ pour $i < n$ (en posant $y_0 = y_n$). On calcule ensuite x (question 2c) de manière analogue. Compter le nombre d'opérations (on ne demande pas le décompte exact, mais un ordre de grandeur) pour résoudre $Ax = b$ avec cette méthode.

Exercice 3 (Vitesse de convergence pour la méthode de Jacobi, barème 10 points)**.**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A.
On suppose que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs et on note B_J la matrice des itérations de la méthode de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E+F)$. Noter que, grâce à l'exercice 1, la matrice B_J est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On rappelle que la méthode de Jacobi s'écrit
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
Itérations : pour tout $k \geq 0$, $Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b$.
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note ρ le rayon spectral de B_J et suppose $\rho < 1$ (de sorte que la méthode de Jacobi est convergente).
On note $a_{i,j}$ le coefficient de A de la ligne i, colonne j. On suppose que A est tridiagonale, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$.

1. (Un exemple) On suppose dans cette question que $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer les valeurs propres de B_J.

   (b) Montrer qu'il existe une infinité de $x^{(0)}$ pour lesquels $x^{(1)} = \bar{x}$.

2. Soit λ une valeur de B_J. Montrer que $-\lambda$ est aussi valeur propre de B_J et que les sous espaces propres associés à λ et $-\lambda$ sont de même dimension. [Utiliser le fait que A est tridiagonale et remarquer que $B_J x = \lambda x$ est équivalent à $(E+F)x = \lambda Dx$. Considérer le vecteur y de composantes $y_i = (-1)^i x_i$.]

3. Montrer que si n est impair, 0 est valeur propre de B_J.
   Question plus difficile, hors barème : dans le cas où il existe un réel a tel que $a_{i+1,i} = a$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, donner un vecteur propre associé à la valeur propre 0 (chercher un vecteur dont les composantes appartiennent à l'ensemble $\{1, -1, 0\}$).

4. On suppose, dans cette question, que $\bar{x} - x^{(0)} = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i$, où $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de B_J, $B_J f_i = \lambda_i f_i$, et $I = \{i; |\lambda_i| < \rho\}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\mu < \rho$ tels que $\|\bar{x} - x^{(k)}\| \leq C\mu^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

5. On suppose, dans cette question, que n est impair.
   Montrer qu'il existe une infinité de $x^{(0)}$ pour lesquels $x^{(1)} = \bar{x}$.