Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
Partiel du 22 mars 2019

La partiel contient 3 exercices. Le barème est sur 28 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20... Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.
Notation : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel de x avec y. La notation "s.d.p." signifie "symétrique définie positive". Pour une matrice A, $c_i(A)$ désigne la i-ième colonne de A et $l_i(A)$ désigne la i-ième ligne de A.

Exercice 1 (Diagonalisation du produit d'une matrice s.d.p. et d'une matrice symétrique, barème 8 points)**.** On rappelle le théorème suivant, vu en cours :

Théorème 1. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ une matrice symétrique. Alors, il existe $\{f_1, \ldots, f_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $Af_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $f_i \cdot f_j = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ une matrice s.d.p.. On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ donnée par le théorème 1. On définit la matrice P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $c_i(P) = Pe_i = f_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que P est inversible, $P^t = P^{-1}$. On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est diagonale à coefficients diagonaux strictements positifs.

   Corrigé – L'image de P est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de P, c'est-à-dire par l'ensemble des f_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathbb{R}^n$ et donc P est inversible. Comme $c_i(P) \cdot c_j(P) = f_i \cdot f_j = \delta_{i,j}$, la matrice P est orthogonale, c'est-à-dire $P^t = P^{-1}$. Enfin,
   $$c_i(D) = De_i = P^{-1}APe_i = P^{-1}Af_i = \lambda_i P^{-1}f_i = \lambda_i e_i.$$
   Comme A est s.d.p., on a $\lambda_i > 0$ et donc D est diagonale à coefficients diagonaux strictements positifs.

2. On note $\sqrt{D}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines positives des coefficients diagonaux de la matrice D (donnée à la question 1). On pose $C = P\sqrt{D}P^{-1}$, montrer que $C^2 = A$ et que C est s.d.p.

   Corrigé – $C^2 = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = A$. $C^t = (P^{-1})^t A^t P^t = PAP^{-1}$ (car P est orthogonale et A est symétrique). Enfin $Cx \cdot x = \sqrt{D}P^{-1}x \cdot P^t x = \sqrt{D}P^{-1}x \cdot P^{-1}x > 0$ si $x \neq 0$ car $\sqrt{D}$ est s.d.p.. La matrice C est donc s.d.p.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

3. En donnant un exemple pour $n = 2$, montrer que $A^{-1}B$ n'est pas nécessairement symétrique.

   Corrigé – un exemple possible est $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, de sorte que $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Montrer que les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont les mêmes que les valeurs propres de $C^{-1}BC^{-1}$ (la matrice C étant donnée à la question 2) et que les sous espaces correspondants sont de même dimension. En déduire que la matrice $A^{-1}B$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$. On a, comme $A = C^2$,
   $$A^{-1}Bx = \lambda x \iff C^{-1}C^{-1}Bx = \lambda x \iff C^{-1}Bx = \lambda Cx \iff C^{-1}BC^{-1}Cx = \lambda Cx.$$
   Comme C est inversible, on en déduit bien que λ est valeur propre de $A^{-1}B$ si et seulement si λ est valeur propre de $C^{-1}BC^{-1}$ et que les sous espaces correspondants sont de même dimension. La matrice $C^{-1}BC^{-1}$ étant symétrique, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $A^{-1}B$ est aussi diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Matrice tridiagonale périodique et factorisation périodique, barème 10 points)**.**
Soient $d, u, \ell \in \mathbb{R}$ tels que $d > |u| + |\ell|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tridiagonale périodique : $A_{i,i} = d,\ 1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = u,\ A_{i+1,i} = \ell,\ 1 \leq i \leq (n-1)$, $A_{1,n} = \ell,\ A_{n,1} = u$ et $A_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer qu'il existe des réels α, β et γ tels que $A = \alpha \hat{L}\hat{U}$ avec
   - $\hat{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\hat{L}_{i,i} = 1,\ 1 \leq i \leq n$, $\hat{L}_{i+1,i} = -\beta,\ 1 \leq i \leq (n-1)$, $\hat{L}_{1,n} = -\beta$ et $\hat{L}_{i,j} = 0$ sinon.
   - $\hat{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\hat{U}_{i,i} = 1,\ 1 \leq i \leq n$, $\hat{U}_{i,i+1} = -\gamma,\ 1 \leq i \leq (n-1)$, $\hat{U}_{n,1} = -\gamma$ et $\hat{U}_{i,j} = 0$ sinon.
   - $|\beta| < 1,\ |\gamma| < 1$.

   Trouver $\alpha,\ \beta$ et γ en fonction de $\ell,\ d$ et u.

   Indication : On pourra commencer par remarquer que $l_i(\hat{L})c_j(\hat{U}) = \begin{cases} 1 + \beta\gamma \text{ si } (i,j) = (i,i), \\ -\gamma \text{ si } (i,j) = (i,i+1) \text{ ou } (n,1), \\ -\beta \text{ si } (i,j) = (i,i-1) \text{ ou } (1,n), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

   Corrigé – *Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $l_i(\hat{L})c_j(\hat{U}) = \sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j}$.*
   Si $i = j < n$, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = \hat{L}_{i,i}\hat{U}_{i,i} + \hat{L}_{i,i-1}\hat{U}_{i-1,i} = 1 + \beta\gamma$.
   Si $i = j = n$, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = \hat{L}_{1,1}\hat{U}_{1,1} + \hat{L}_{1,n}\hat{U}_{n,1} = 1 + \beta\gamma$.
   Si $j = i+1$ et $i < n$, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = \hat{L}_{i,i}\hat{U}_{i,i+1} = -\gamma$.
   Si $j = 1$ et $i = n$, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = \hat{L}_{n,n}\hat{U}_{n,1} = -\gamma$.
   Si $j = i-1$, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = \hat{L}_{i,i-1}\hat{U}_{i-1,i-1} = -\beta$.
   Si $j = n$ et $i = 1$, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = \hat{L}_{1,n}\hat{U}_{n,n} = -\beta$.
   Dans tous les autres cas, on a $\sum_{k=1}^n \hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = 0$, car pour chaque k on a $\hat{L}_{i,k}\hat{U}_{k,j} = 0$.
   La condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que $\alpha\hat{L}\hat{U} = A$ est donc
   $$\alpha(1 + \beta\gamma) = d,\ \alpha\gamma = u,\ \alpha\beta = \ell. \tag{1}$$
   La condition (1) donne $\alpha \neq 0$ (car $d \neq 0$) et $\alpha^2 - d\alpha + u\ell = 0$. Comme $d > |u| + |\ell|$, on a $d^2 > u^2 + \ell^2 + 2|u\ell|$ et donc $d^2 - 4u\ell > u^2 + \ell^2 - 2|u\ell| = (|u| - |\ell|)^2 \geq 0$. On en déduit que $\alpha = (1/2)(d \pm \sqrt{d^2 - 4u\ell})$.
   On choisit $\alpha = (1/2)(d + \sqrt{d^2 - 4u\ell})$, $\beta = u/\alpha$ et $\gamma = \ell/\alpha$. La condition (1) est bien vérifiée.
   Enfin on remarque que $\sqrt{d^2 - 4u\ell} > |u| - |\ell|$ et donc $\alpha > (1/2)(d + |u| - |\ell|) > |u|$. De même $\sqrt{d^2 - 4u\ell} > |\ell| - |u|$ et donc $\alpha > (1/2)(d + |\ell| - |u|) > |\ell|$. On en déduit que $|\beta| < 1$ et $|\gamma| < 1$.

2. Pour résoudre $Ax = b$, on pose $c = \alpha^{-1}b$ et on résout successivement les deux systèmes suivants (avec les matrices $\hat{L}$ et $\hat{U}$ de la question 1),
   $$\begin{cases} \hat{L}y = c \\ \hat{U}x = y. \end{cases}$$

   (a) (Calcul de y) Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on note $y_1, \ldots, y_n$ les composantes de y. Montrer que $\hat{L}y = c$ si et seulement si
   $$y_i = \sum_{k=1}^{i} c_k\beta^{i-k} + \beta^i y_n \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$
   [Utiliser une récurrence sur i, i allant de 1 à n.]
   En déduire que $\hat{L}$ est inversible et $y_n = (\sum_{k=1}^n c_k\beta^{n-k})/(1 - \beta^n)$.

Corrigé – *Le système $\hat{L}y = c$ s'écrit*

$$y_1 - \beta y_n = c_1, \tag{3}$$
$$-\beta y_{i-1} + y_i = c_i \text{ pour } i \in \{2, \ldots, n\}. \tag{4}$$

On donc bien, pour $i = 1$, $y_1 = \sum_{k=1}^{1} c_k \beta^{1-k} + \beta^1 y_n = c_1 + \beta y_n$.
puis, par récurrence, si $y_i = \sum_{k=1}^{i} c_k \beta^{i-k} + \beta^i y_n$, $1 \le i \le n-1$, on a

$$y_{i+1} = c_{i+1} + \beta y_i = c_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} c_k \beta^{i+1-k} + \beta^{i+1} y_n = \sum_{k=1}^{i+1} c_k \beta^{i+1-k} + \beta^{i+1} y_n,$$

Ce qui termine la récurrence.
Comme $|\beta| < 1$, On a $\beta^n \neq 1$. On en déduit que le système $\hat{L}y = c$ admet une unique solution. Elle est donnée par $y_n = (\sum_{k=1}^{n} c_k \beta^{n-k})/(1 - \beta^n)$ (c'est l'équation (2) pour $i = n$) puis par (2) pour $i = 1, \ldots, n-1$ ou (mieux pour le calcul) par (3)-(4) pour $i = 1, \ldots, n-1$.

(b) On suppose, dans cette question seulement, que $\beta = 1$. Montrer que $\hat{L}$ n'est pas inversible et donner un élément non nul de $\mathrm{Ker}\hat{L}$.

Corrigé – *Pour avoir un élément du noyau de $\hat{L}$, il suffit de prendre un vecteur y dont toutes les composantes sont égales à 1. On a bien y solution de (2) avec $c = 0$, c'est-à-dire $\hat{L}y = 0$.*

(c) (Calcul de x) Par une technique analogue à celle de la question 2a, montrer que $\hat{U}$ est inversible et calculer x en fonction de y. [On pourra calculer les x_i, i allant de n à 1 en fonction de x_1.]

Corrigé – *Le système $\hat{U}x = y$ s'écrit*

$$-\gamma x_1 + x_n = y_n, \tag{5}$$
$$x_i - \gamma x_{i+1} = y_i \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{6}$$

On en déduit par récurrence (i allant de n à 1)

$$x_i = \sum_{k=i}^{n} y_k \gamma^{k-i} + \gamma^{n-i+1} x_1, \text{ pour tout } 1 \le i \le n.$$

En effet, cette équation est bien vraie pour $i = n$. Puis, si elle vraie pour i, $1 < i \le n$, on a

$$x_{i-1} = y_{i-1} + \gamma x_i = y_{i-1} + \gamma \sum_{k=i}^{n} y_k \gamma^{k-i} + \gamma^{n-i+2} x_1 = \sum_{k=i-1}^{n} y_k \gamma^{k-(i-1)} + \gamma^{n-(i-1)+1} x_1,$$

Ce qui termine la récurrence.
Comme $|\gamma| < 1$, On a $\gamma^n \neq 1$. On en déduit que le système $\hat{U}x = y$ admet une unique solution. Elle est donnée par $x_1 = (\sum_{k=1}^{n} y_k \gamma^{k-1})/(1 - \gamma^n)$ puis par par (5)-(6) pour $i = n, \ldots, 2$.

3. Pour résoudre effectivement le système $Ax = b$ avec la méthode donnée par les questions 1-2, pour calculer y (question 2a) on calcule d'abord les β^i ($1 \le i \le n$) et y_n, puis on utilise plutôt la formule $y_i = c_i + \beta y_{i-1}$ pour $i < n$ (en posant $y_0 = y_n$). On calcule ensuite x (question 2c) de manière analogue. Compter le nombre d'opérations (on ne demande pas le décompte exact, mais un ordre de grandeur) pour résoudre $Ax = b$ avec cette méthode.

Corrigé – *Calcul de $\hat{L}$ et $\hat{U}$: 9 opérations.*
Calcul des β^i : $n-1$ opérations. Calcul de y_n : $2n+1$ opérations. Calcul de y_i, $i < n$: $2(n-1)$ opérations. On obtient y avec $5n-2$ opérations.
De même, on obtient x en $5n-2$ opérations.
Le nombre total d'opérations est donc de l'ordre de $10n$.

Exercice 3 (Vitesse de convergence pour la méthode de Jacobi, barème 10 points)**.**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A.
On suppose que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs et on note B_J la matrice des itérations de la méthode de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E+F)$. Noter que, grâce à l'exercice 1, la matrice B_J est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On rappelle que la méthode de Jacobi s'écrit
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
Itérations : pour tout $k \geq 0$, $Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b$.
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note ρ le rayon spectral de B_J et suppose $\rho < 1$ (de sorte que la méthode de Jacobi est convergente).
On note $a_{i,j}$ le coefficient de A de la ligne i, colonne j. On suppose que A est tridiagonale, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$.

1. (Un exemple) On suppose dans cette question que $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer les valeurs propres de B_J.

   Corrigé –

   $$B_J = (1/2)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Les valeurs propres de B_J sont donc 0 et $\pm\sqrt{2}/2$.

   (b) Montrer qu'il existe une infinité de $x^{(0)}$ pour lesquels $x^{(1)} = \bar{x}$.

   Corrigé – Pour $k \geq 0$, on pose $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$, de sorte que la méthode de Jacobi s'écrit $e^{(k+1)} = B_J e^{(k)}$ pour tout $k \geq 0$. Si $e^{(0)} \in \mathrm{Ker} B_J$, on a donc $e^{(1)} = 0$, c'est-à-dire $x^{(1)} = \bar{x}$. Comme $\dim \mathrm{Ker} B_J = 1$, on a donc une infinité de $x^{(0)}$ pour lesquels $x^{(1)} = \bar{x}$.

2. Soit λ une valeur de B_J. Montrer que $-\lambda$ est aussi valeur propre de B_J et que les sous espaces propres associés à λ et $-\lambda$ sont de même dimension. [Utiliser le fait que A est tridiagonale et remarquer que $B_J x = \lambda x$ est équivalent à $(E+F)x = \lambda Dx$. Considérer le vecteur y de composantes $y_i = (-1)^i x_i$.]

   Corrigé – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. On note x_i les composantes de x et on pose par convention $x_0 = x_{n+1} = a_{-1,0} = a_{n,n+1} = 0$. Le vecteur x est vecteur propre de B_J associé à la valeur propre λ si et seulement si

   $$a_{i-1,i}x_{i-1} + a_{i,i+1}x_{i+1} = \lambda a_{i,i}x_i \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,n\}.$$

   En multipliant cette équation par $-(-1)^i$, on a donc $a_{i-1,i}(-1)^{i-1}x_{i-1} + a_{i,i+1}(-1)^{i+1}x_{i+1} = -\lambda(-1)^i a_{i,i}x_i$, c'est-à-dire avec $y_i = (-1)^i x_i$,

   $$a_{i-1,i}y_{i-1} + a_{i,i+1}y_{i+1} = -\lambda a_{i,i}y_i \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,n\}.$$

   Soit maintenant $\{x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\}$ une base du sous espace propre associé à la valeur propre λ (k est donc la dimension de ce sous espace). La famille $\{y^{(1)},\ldots,y^{(k)}\}$, formée selon le principe précédent (c'est-à-dire $y_i^{(j)} = (-1)^i x_i^{(j)}$) est alors une famille de vecteurs propres associés à la valeur propre $(-\lambda)$. On note M la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $x^{(1)},\ldots,x^{(k)}$ et N la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $y^{(1)},\ldots,y^{(k)}$. L'espace vectoriel engendré par $\{x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\}$ est de dimension k (c'est le sous espace propre associé à λ). La matrice M, ainsi que M^t, est donc de rang k. Or M^t et N^t ont même rang (les espaces vectoriels engendrés par les colonnes de M^t et N^t sont les mêmes). La matrice N est donc de rang k. ceci montre que la dimension du sous espace propre associé à valeur propre $(-\lambda)$ est au supérieure ou égale à k. En changeant les rôle de λ et $(-\lambda)$, on obtient finalement que les sous espaces propres associés à λ et $(-\lambda)$ ont même dimensions.

   Une autre démonstration consiste à introduire l'application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à x associe y (défini par $y_i = (-1)^i x_i$). Cetta application est bijective et transforme le sous espace propre associé à λ en sous espace propre associé à $(-\lambda)$. Comme T est bijective, les deux sous espaces propres ont même dimension.

3. Montrer que si n est impair, 0 est valeur propre de B_J.

   Question plus difficile, hors barème : dans le cas où il existe un réel a tel que $a_{i+1,i} = a$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, donner un vecteur propre associé à la valeur propre 0 (chercher un vecteur dont les composantes appartiennent à l'ensemble $\{1, -1, 0\}$).

   Corrigé – *La question précédente nous montre que la somme des dimensions (algébriques et géométriques car B_J est diagonalisable) des valeurs propres non nulles de B_J est paire. Si n est impair 0 est donc nécessairement valeur propre.*

   Pour la question hors barème, on note a la valeur des coefficients non nuls de E et F. un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est un vecteur tel que

   $$ax_{i-1} + ax_{i+1} = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

   On rappelle que, par convention $x_0 = x_{n+1} = 0$. Un vecteur possible consiste à prendre $x_i = 0$ si i est pair, $x_i = 1$ si $1 + 4k$, et $x_i = -1$ si $i = 3 + 4k$, avec $k \in \mathbb{N}$. En particulier, grâce au fait que n est impair, on a bien $ax_{n-1} + ax_{n+1} = 0$.

4. On suppose, dans cette question, que $\bar{x} - x^{(0)} = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i$, où $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de B_J, $B_J f_i = \lambda_i f_i$, et $I = \{i; |\lambda_i| < \rho\}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\mu < \rho$ tels que $\|\bar{x} - x^{(k)}\| \leq C\mu^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

   Corrigé – *On note $\mu = \max\{|\lambda_i|, \alpha_i \neq 0\}$ et $J = \{i, |\lambda_i| = \mu\}$. On a $\mu < \rho$. On pose $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$, de sorte que*

   $$e^{(k)} = B_J^k e^{(0)} = \sum_{i \in I} \alpha_i \lambda_i^k f_i.$$

   On peut supposer $\mu \neq 0$ (sinon $e^{(k)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et il suffit de prendre $C = 0$). On a alors

   $$e^{(k)} = \mu^k \Big(\sum_{i \in J} \alpha_i \Big(\frac{\lambda_i}{\mu}\Big)^k f_i\Big) + \mu^k \Big(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i \Big(\frac{\lambda_i}{\mu}\Big)^k f_i\Big).$$

   On a donc

   $$\lim_{k \to +\infty,\, k \text{ pair}} \frac{e^{(k)}}{\mu^k} = \sum_{i \in J} \alpha_i f_i,$$

   $$\lim_{k \to +\infty,\, k \text{ impair}} \frac{e^{(k)}}{\mu^k} = \sum_{i \in J} \alpha_i \mathrm{sign}(\lambda_i) f_i.$$

   ceci prouve que la suite de terme général $\|e^{(k)}\|/\mu^k$ est bornée. On peut alors prendre pour C une borne de cette suite.

5. On suppose, dans cette question, que n est impair.

   Montrer qu'il existe une infinité de $x^{(0)}$ pour lesquels $x^{(1)} = \bar{x}$.

   Corrigé – *Comme dans la question 1b, si $e^{(0)} \in \mathrm{Ker} B_J$, on a $e^{(1)} = 0$, c'est-à-dire $x^{(1)} = \bar{x}$. Comme $\dim \mathrm{Ker} B_J \geq 1$ (car on sait que 0 est valeur propre de B_J, question 3), on a donc une infinité de $x^{(0)}$ pour lesquels $x^{(1)} = \bar{x}$.*