

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
SMI6U01TL. partiel du 13 mars 2020

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 27 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20... Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.

Exercice 1 (Factorisation d'une matrice s.d.p. à $2q+1$ diagonales, conservation du profil, barème 7 points).

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n > 1$) une matrice s.d.p.. On note L la matrice de la décomposition de Choleski de A . On rappelle que $A = LL^t$ et que L peut se calculer avec les formules suivantes (avec les notations habituelles pour les coefficients de A et L) :

$$\ell_{1,1} = (a_{1,1})^{1/2}, \quad \ell_{i,1} = \frac{1}{\ell_{1,1}} (a_{i,1}), \quad i \in \{2, \dots, n\}. \quad (1)$$

$$\ell_{j,j} = (a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k} \ell_{j,k})^{1/2}, \quad j \in \{2, \dots, n\}, \quad (2)$$

$$\ell_{i,j} = \frac{1}{\ell_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{i,k} \ell_{j,k} \right), \quad i \in \{j+1, \dots, n\}, \quad j \in \{2, \dots, n\}. \quad (3)$$

1. Dans quel ordre faut-il faire les opérations ci-dessus pour obtenir L ?

Corrigé – On calcule les colonnes de L dans l'ordre $1, \dots, n$.

On calcule d'abord $\ell_{1,1}$ puis $\ell_{i,1}$ pour tout $i > 1$ par (1).

Puis lorsque les $j-1$ premières colonnes de L sont connues, on calcule $\ell_{j,j}$ (par (2)) et ensuite $\ell_{i,j}$ pour tout $i > j$ (par (3)). Ceci est possible car $k \leq j-1$ dans (2)-(3). (On rappelle aussi que $\ell_{i,j} = 0$ pour $i < j$.)

2. On suppose dans cette question que $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$ (on dit que A a "3 diagonales non nulles").

- (a) (Conservation du profil) Montrer que $\ell_{i,j} = 0$ si $i > j+1$.

Corrigé –

Ceci a été vu en cours. Cela peut aussi se montrer avec les formules (1)-(3)) avec une récurrence sur j .

Pour $j = 1$, il suffit de remarquer $\ell_{i,1} = a_{i,1}/\ell_{1,1} = 0$ si $i > 2$.

Puis, on suppose que $\ell_{i,k} = 0$ pour $k \in \{1, \dots, j-1\}$ et $i > k+1$. La formule (3) donne alors $\ell_{i,j} = 0$ pour $i > j+1$ (en effet, $a_{i,j} = 0$ et $\ell_{i,k} = 0$ dans (3) car pour $k \leq j-1$ on a $i > k+1$).

- (b) Montrer qu'il suffit de $4n-3$ opérations (additions, soustractions, multiplications, divisions, racines carrées) pour calculer L .

[Remarquer que l'on calcule seulement $\ell_{i,j}$ pour $i = j$ et $j+1$ et que dans (3), comme $i > j$, on a $\ell_{i,k} \ell_{j,k} = 0$ pour tout k .]

Corrigé – On note $N_1(j)$ le nombre d'opérations pour calculer $\ell_{j,j}$ et $N_2(i, j)$ le nombre d'opérations pour calculer $\ell_{i,j}$, $i > j$, de sorte que le nombre total est

$$N = \sum_{j=1}^n (N_1(j) + \sum_{i=j+1}^n N_2(i, j))$$

Un calcul simple donne $N_1(1) = 1$, $N_1(j) = 3$ pour $j > 1$, $N_2(i, j) = 0$ pour $i > j+1$, $N_2(j+1, j) = 1$ pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$. On en déduit que $N = 1 + 3(n-1) + (n-1) = 4n-3$.

3. Soit $q > 1$. On suppose que $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > q$ (on dit que A a " $2q+1$ diagonales non nulles").

- (a) (Conservation du profil) Montrer que $\ell_{i,j} = 0$ si $i > j+q$.

Corrigé – Cette question a été vue en cours. Il est aussi possible de raisonner comme à la question 2a.

Pour $j = 1$, il suffit de remarquer $\ell_{i,1} = a_{i,1}/\ell_{1,1} = 0$ si $i > q + 1$.

Puis, on suppose que $\ell_{i,k} = 0$ pour $k \in \{1, \dots, j-1\}$ et $i > k + q$. La formule (3) donne alors $\ell_{i,j} = 0$ pour $i > j + q$ (en effet, $a_{i,j} = 0$ et $\ell_{i,k} = 0$ dans (3) car pour $k \leq j-1$ on a $i > k + q$).

- (b) Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir L . On pourra se contenter de donner en fonction de q une estimation justifiée du terme de plus haut degré en n . Le calcul exact du nombre d'opérations est hors barème.

[Remarquer que dans (2) la somme va de $k = \max\{1, j - q\}$ à $k = j - 1$ et que dans (3) la somme va de $k = \max\{1, i - q\}$ à $k = j - 1$ (on rappelle que l'on calcule $\ell_{i,j}$ que pour $j \leq i \leq j + q$).]

Corrigé – On reprend les notations de la question 2b. Pour ce cas, les formules (2)-(3) donnant L sont :

Pour $j = 2, \dots, n$,

$$\ell_{j,j} = (a_{j,j} - \sum_{k=\max\{1, j-q\}}^{j-1} \ell_{j,k} \ell_{j,k})^{1/2}, \quad (4)$$

et pour $i = j + 1, \min\{j + q, n\}$,

$$\ell_{i,j} = \left(a_{i,j} - \sum_{k=\max\{1, i-q\}}^{j-1} \ell_{i,k} \ell_{j,k} \right) \frac{1}{\ell_{j,j}}. \quad (5)$$

On distingue maintenant selon les valeurs de j et on calcule pour j donné, $N_1(j)$ et $N_2(j, i)$ (et non $N_2(i, j)$), on calcule donc ici $\ell_{j,i}$ pour $i \leq j$. En fait, on calcule donc la ligne j de L .

Cas $j \leq q$

Dans ce cas $\max\{1, j - q\} = 1$ et, si $j > 1$,

$$N_1(j) = 2(j - 1) + 1 = 2j - 1, \quad N_2(j, i) = 2(i - 1) + 1 = 2i - 1.$$

Il faut calculer $\ell_{j,i}$ pour i allant de 1 à j , le nombre total d'opérations pour cette valeur de j est donc

$$N(j) = N_1(j) + \sum_{i=1}^{j-1} N_2(j, i) = 2j - 1 + \sum_{i=1}^{j-1} (2i - 1) = j^2.$$

Noter que ce calcul est exact même pour $j = 1$.

Cas $j > q$

Dans ce cas $\max\{1, j - q\} = j - q$ et

$$N_1(j) = 2(j - 1 - (j - q) + 1) + 1 = 2q + 1,$$

$$N_2(j, i) = 2(i - 1 - (j - q) + 1) + 1 = 2(i - j + q) + 1.$$

Ici, Il faut calculer $\ell_{j,i}$ pour i allant de $j - q$ à j , le nombre total d'opérations pour cette valeur de j est donc

$$N(j) = N_1(j) + \sum_{i=j-q}^{j-1} N_2(j, i) = 2q + 1 + \sum_{i=j-q}^{j-1} 2(i - j + q) + 1 = 2 \sum_{i=1}^q k + q + 1 = (q + 1)^2$$

On en déduit N :

$$N = \sum_{j=1}^n N(j) = \sum_{j=1}^q j^2 + \sum_{j=q+1}^n (q + 1)^2 = \frac{q(q+1)(2q+1)}{6} + (n - q)(q + 1)^2.$$

Exercice 2 (Matrices à diagonale dominante, barème 15 points). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

1. Dans cette question, on suppose que A vérifie (avec la notation habituelle pour les coefficients de A)

$$a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (6)$$

(a) Montrer que A est inversible.

[Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = 0$. En utilisant $(Ax)_i = 0$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$, montrer que $x = 0$.]

Corrigé – Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = 0$.

On suppose $x \neq 0$ et on choisit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$. De $(Ax)_i = 0$ on déduit

$$a_{i,i}|x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|,$$

Ce qui est impossible car $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < a_{i,i}$ et $x_i \neq 0$. On a donc $x = 0$, ce qui prouve que A est inversible.

(b) Montrer que la méthode de Jacobi (pour la résolution de $Ax = b$) converge.

Corrigé – On note B_J la matrice de la méthode de Jacobi. Soit λ une valeur propre de B_J et x un vecteur propre (non nul) correspondant. De $B_J x = \lambda x$, on déduit que, avec la décomposition habituelle de A , $\lambda D x = (E + F)x$.

On choisit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$ et on obtient (avec (6))

$$|\lambda| a_{i,i}|x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| < a_{i,i}|x_i|.$$

Comme $a_{i,i}|x_i| > 0$ ceci donne $|\lambda| < 1$ et prouve que $\rho(B_J) < 1$ et donc que la méthode de Jacobi converge.

(c) Si A est symétrique, montrer que A est s.d.p.

Corrigé – Comme A est symétrique, les valeurs propres de A sont réelles. Soit λ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre (non nul) correspondant. On choisit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$. On peut supposer $x_i > 0$ (sinon on remplace x par $-x$). De $Ax = \lambda x$ on déduit

$$\lambda x_i = (Ax)_i = a_{i,i}x_i + \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \geq a_{i,i}x_i - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \geq (a_{i,i} - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|)x_i > 0.$$

On a donc $\lambda x_i > 0$ et donc $\lambda > 0$, ce qui prouve que A est s.d.p..

Dans la suite de l'exercice, on suppose que A vérifie (6) avec “ $\geq$ ” au lieu de “ $>$ ”, c'est-à-dire

$$a_{i,i} \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (7)$$

On dit que A est irréductible si pour tout $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ tels que $I \cap J = \emptyset$, $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $I \cup J = \{1, \dots, n\}$, il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $a_{i,j} \neq 0$.

2. Dans cette question, on suppose que la matrice A vérifie (7), qu'elle est irréductible et que :

$$\text{Il existe } i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_{i_0, i_0} > \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|. \quad (8)$$

(a) Montrer que A est inversible.

[Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = 0$. Poser

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } |x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|\},$$

montrer, en raisonnant par l'absurde, que $I = \{1, \dots, n\}$. Conclure en utilisant (8).]

Corrigé – On suppose que $I \neq \{1, \dots, n\}$ et on pose $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Comme A est irréductible, il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $a_{i,j} \neq 0$.

De $(Ax)_i = 0$ on déduit, comme $|x_j| < |x_i|$ et $a_{i,j} \neq 0$ (et donc $|a_{i,j}x_j| < |a_{i,j}x_i|$),

$$a_{i,i}|x_i| = \left| \sum_{k \neq i} a_{i,k}x_k \right| \leq \sum_{k \neq i} |a_{i,k}||x_k| < \sum_{k \neq i} |a_{i,k}||x_i| \leq a_{i,i}|x_i|,$$

Ce qui est impossible. On a donc $I = \{1, \dots, n\}$.

On peut conclure avec (8) en écrivant $(Ax)_{i_0} = 0$. Comme $i_0 \in I$, on a $|x_{i_0}| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$,

$$a_{i_0, i_0} |x_{i_0}| = \left| \sum_{k \neq i_0} a_{i_0, k} x_k \right| \leq \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0, k}| |x_k| < a_{i_0, i_0} |x_{i_0}|,$$

ce qui est une nouvelle fois impossible. La matrice A est donc inversible.

(b) Montrer que la méthode de Jacobi (pour la résolution de $Ax = b$) converge.

Corrigé – On note B_J la matrice de la méthode de Jacobi. Soit λ une valeur propre de B_J et x un vecteur propre (non nul) correspondant. On pose $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } |x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|\}$.

On distingue deux cas

Cas 1 Si $I \neq \{1, \dots, n\}$, on pose $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Comme A est irréductible, il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $a_{i,j} \neq 0$.

De $\lambda Dx = (E + F)x$ on déduit, comme $|x_j| < |x_i|$ et $a_{i,j} \neq 0$ (et donc $|a_{i,j} x_j| < |a_{i,j} x_i|$),

$$|\lambda| |a_{i,i} x_i| = \left| \sum_{k \neq i} a_{i,k} x_k \right| \leq \sum_{k \neq i} |a_{i,k}| |x_k| < \sum_{k \neq i} |a_{i,k}| |x_i| \leq a_{i,i} |x_i|,$$

On en déduit que $|\lambda| < 1$.

Cas 2 Si $I = \{1, \dots, n\}$, alors, de $\lambda Dx = (E + F)x$ on déduit, avec (8),

$$|\lambda| a_{i_0, i_0} |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| |x_{i_0}| < a_{i_0, i_0} |x_{i_0}|.$$

Comme $a_{i_0, i_0} |x_{i_0}| > 0$ ceci donne $|\lambda| < 1$.

On a bien montré que $\rho(B_J) < 1$ et donc que la méthode de Jacobi converge.

(c) Si A est symétrique, montrer que A est s.d.p.

Corrigé – Comme A est symétrique, les valeurs propres de A sont réelles. Soit λ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre (non nul) correspondant. On pose $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } |x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|\}$.

On distingue encore deux cas

Cas 1 Si $I \neq \{1, \dots, n\}$, on pose $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Comme A est irréductible, il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $a_{i,j} \neq 0$.

De $Ax = \lambda x$ on déduit, en supposant $x_i > 0$ (sinon, on change x en $-x$) et en utilisant $|a_{i,j} x_j| < |a_{i,j} x_i|$,

$$\lambda x_i = (Ax)_i = a_{i,i} x_i + \sum_{k \neq i} a_{i,k} x_k \geq a_{i,i} x_i - \sum_{k \neq i} |a_{i,k}| |x_k| > (a_{i,i} - \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|) x_i > 0.$$

On a donc $\lambda x_i > 0$ et donc $\lambda > 0$.

Cas 2 Si $I = \{1, \dots, n\}$, on obtient, en supposant $x_{i_0} > 0$ (sinon, on change x en $-x$) et en utilisant (8),

$$\lambda x_{i_0} = (Ax)_{i_0} = a_{i_0, i_0} x_{i_0} + \sum_{k \neq i_0} a_{i_0, k} x_k \geq a_{i_0, i_0} x_{i_0} - \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0, k}| |x_k| \geq (a_{i_0, i_0} - \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0, k}|) x_{i_0} > 0.$$

Ceci donne $\lambda > 0$.

On a bien montré que A est s.d.p..

3. Donner un exemple (avec $n = 3$) pour lequel A est s.d.p., irréductible, vérifie (7) et la méthode de Jacobi ne converge pas (et donc ne vérifie pas (8)).

Corrigé – Cet exemple a été vu en TD, il suffit de prendre $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ avec $a = 1/2$.

4. Donner un exemple (avec $n = 3$) pour lequel A vérifie (7)-(8), est à coefficients diagonaux strictement positifs et est non inversible (et est donc réductible).

Corrigé – Il suffit ici de prendre, par exemple, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Montrer que pour les questions 3 et 4, il n'y a pas d'exemple avec $n = 2$.

Corrigé – Soit $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{bmatrix}$.

Pour la question 3, on veut A s.d.p., irréductible, vérifiant (7). Comme A est s.d.p., $\gamma = \delta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma^2 < \alpha\beta$. Comme A vérifie (7), on a $|\gamma| \leq \alpha$ et $|\gamma| \leq \beta$. On en déduit que $|\gamma| < \alpha$ et/ou $|\gamma| < \beta$. Ce qui prouve que (8) est vérifié.

Pour la question 4, on veut que A vérifie (7)-(8) et que A soit à coefficients diagonaux strictement positifs. On a donc $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|\gamma| \leq \alpha$ et $|\delta| \leq \beta$. Comme A doit aussi être réductible, on a $\gamma = \delta = 0$ et donc A est inversible.

Exercice 3 (Méthode de la puissance, 5 points).

On considère la méthode de la puissance pour la matrice $A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\mu \in \mathbb{R}^*$:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, x^{(0)} \neq 0,$$

$$x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

(On rappelle que $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.)

1. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie (ce qui revient à montrer que $Ax^{(k)} \neq 0$ pour tout k).

Corrigé – Comme $\mu \neq 0$, $\text{Ker}(A) = \{0\}$. On en déduit par récurrence que $Ax^{(k)} \neq 0$ pour tout k .

2. On suppose dans cette question que $\mu > 0$. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. Donner sa limite ainsi que la limite de la suite $(Ax^{(k)} \cdot x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

[On pourra remarquer que $x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|}$ et calculer $A^k x^{(0)}$ en fonction de k , x_1 et x_2 .]

Corrigé –

On remarque que $Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} \mu x_1 + x_2 \\ \mu x_2 \end{bmatrix}$. Ceci nous suggère que $A^k x^{(0)} = \begin{bmatrix} \mu^k x_1 + k\mu^{k-1}x_2 \\ \mu^k x_2 \end{bmatrix}$. Cette formule se

vérifie par récurrence, En effet on suppose que $A^k x^{(0)} = \begin{bmatrix} \mu^k x_1 + k\mu^{k-1}x_2 \\ \mu^k x_2 \end{bmatrix}$, on en déduit

$$A^{k+1}x^{(0)} = \begin{bmatrix} \mu(\mu^k x_1 + k\mu^{k-1}x_2) + \mu^k x_2 \\ \mu^{k+1}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{k+1}x_1 + (k+1)\mu^k x_2 \\ \mu^{k+1}x_2 \end{bmatrix}.$$

On cherche maintenant la limite de $x^{(k)}$. En notant $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

$$x^{(k)} = \frac{(\mu^k x_1 + k\mu^{k-1}x_2)e_1 + \mu^k x_2 e_2}{\|(\mu^k x_1 + k\mu^{k-1}x_2)e_1 + \mu^k x_2 e_2\|} = \frac{(x_1 + (k/\mu)x_2)e_1 + x_2 e_2}{\|(x_1 + (k/\mu)x_2)e_1 + x_2 e_2\|}.$$

Si $x_2 = 0$, on en déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \text{sign}(x_1)e_1$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)} = \mu$.

Si $x_2 \neq 0$, on en déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \text{sign}(x_2)e_1$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)} = \mu$.

Pour la limite de $Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$, on a utilisé le fait que $Ae_1 = \mu e_1$ et $e_1 \cdot e_1 = 1$.

3. On suppose dans cette question que $\mu < 0$. Les $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Ax^{(k)} \cdot x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, donner les limites de ces suites.

Corrigé – Dans ce cas, la formule pour $x^{(k)}$ est

$$x^{(k)} = (-1)^k \frac{(x_1 + (k/\mu)x_2)e_1 + x_2e_2}{|(x_1 + (k/\mu)x_2)e_1 + x_2e_2|}.$$

La suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente, mais les suites $(x^{(2k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x^{(2k+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. La suite $(Ax^{(k)} \cdot x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est μ .