# Année universitaire 2014/2015

| Site : | ☐ Luminy | ☐ St-Charles | ☐ St-Jérôme | ☐ Cht-Gombert | ☐ Aix-Montperrin | ☐ Aubagne-SATIS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sujet session de : ☐ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☒ Examen | | | | | Durée de l'épreuve : **3H** | |
| Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU | | | | | Nom diplôme : **Licence de Mathématiques** | |

| Code Apogée du module : **ENSMI5U4** | Libellé du module : **Analyse numérique et Optimisation** |
|---|---|

| Document autorisé : ☐ OUI ☒ NON | Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON |
|---|---|

*Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

---

**Exercice 1 (Vrai-faux)**
*Répondre par vrai ou faux, en motivant la réponse par une démonstration ou un théorème du cours si c'est vrai, et par un contre exemple si c'est faux.*

1. Le système linéaire
$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j}x_j = 0 \text{ pour tout } i = 1,\dots,n$$
admet toujours une solution non nulle.
VRAI : l'ensemble des solutions est le noyau de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$ qui est de dimension au moins un par le théorème du rang.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 \\ \alpha & 0 & c \end{bmatrix}$. On suppose que $A$ est symétrique définie positive. La méthode de Jacobi converge pour n'importe quel second membre et n'importe quel choix initial.
VRAI On peut réordonner les équations et inconnues de manière a resoudre un systeme avec la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ c & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ qui est sdp triadiag.
Autre démonstration. $B_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et deux valeurs propres de signe opposés. Le polynôme caractéristique de la matrice d'itération $B_J$ est donné par $\chi_{B_J}(X) = -X(X^2 - \frac{\alpha^2}{ac})$. Par conséquent, $\rho(B_J) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}}$. Comme $A$ est sdp, on sait que $a, b, c$ sont positifs et que $\det A = b(ac - \alpha^2) > 0$. On en déduit que $\alpha^2 < ac$ et donc que $\rho(B_J) < 1$.

3. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{k+1} = \cos\left(\dfrac{1}{1+x_k}\right)$, converge vers une limite $\ell$ indépendante de $x_0$.
On vérifie que l'application $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ est une application de $[0,1]$ dans lui-même qui est contractante. En effet, $0 < \dfrac{1}{1+x} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in [0,1]$. De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}\sin\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$. On voit que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $f'(x) \leq \sin(1) < 1$. On peut donc appliquer le théorème de point fixe de Banach pour déduire que $f$ admet un unique point fixe dans l'intervalle $[0,1]$ qui est limite de toutes les suites $x_{k+1} = f(x_k)$, $x_0 \in [0,1]$.

4. L'algorithme de Newton pour $F(x,y) = (\sin(x) + y, xy)^t$ est bien défini pour la condition initiale $(\frac{\pi}{2}, 0)$. FAUX. On vérifie que
$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$
et par conséquent
$$DF\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$
n'est pas inversible.

5. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + y$ admet un unique minimum.
Posons $X = (x,y)^t$, on reconnait la fonctionnelle quadratique $F(x,y) = \frac{1}{2}(AX, X) - (b, X)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $A$ une matrice symétrique définie positive. Le cours nous dit alors que $F$ admet un unique minimum.

**Exercice 2 (Normes et conditionnement)**

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que

$$\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_1$. Montrer que

$$\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

3. On considère la matrice $B = (B_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $B_{ii} = 1,\ B_{ij} = -1\, i < j,\ B_{ij} = 0$ sinon.

   (a) Calculer $B^{-1}$.

   On a $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour calculer $B^{-1}$, on peut regarder ce qui se passe pour $n = 4$. On échelonne le système

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{21}(1), T_{31}(1), T_{4,1}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{32}(1), T_{42}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{43}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   En dimension supérieure, l'échelonnement va se passer de façon identique et on voit que le candidat pour être l'inverse de $B$ est la matrice $C$ avec $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 2^{n-2} & \cdots & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie par le calcul que l'on a bien $BC = CB = \mathrm{Id}$.

   En effet (aie aie aie au secours)

$$(BC)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik}C_{kj} = \sum_{k=j}^i B_{ik}C_{kj}$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } j < i \\ B_{ii}C_{ii} = 1 \text{ si } i = j \\ B_{j-1,j-1}C_{j-1,j} + B_{j,j-1}C_{jj} = 1 - 1 = 0 \text{ si } j = i+1 \\ B_{ii}C_{ij} + \displaystyle\sum_{k=i+1}^j B_{kj} = 2^{j-i-1} - (\sum_{k=i+1}^{j-1} 2^{k-i-1} + B_{jj}) = 2^{j-i-1} - (\sum_{k'=0}^{j-i-2} 2^{k'} + 1) = 0 \text{ si } j > i+1. \end{cases}$$

   (b) En déduire $\mathrm{cond}_1(B)$ et $\mathrm{cond}_\infty(B)$.

   On rappelle que $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ et $\|A\|_1 = \max_j \sum_j |a_{ij}|$. Par conséquent, $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = n$ et $\|B^{-1}\|_1 = \|B^{-1}\|_\infty = 1 + 1 + 2 + \cdots + 2^{n-2} = 1 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}$. On en déduit, $cond_\infty(B) = \mathrm{cond}_1(B) = n2^{n-1}$.

4. Soit $A$ une matrice carrée de taille $n \times n$. L'objectif de cette question est de montrer que

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{cond}_\infty(A) \leq \mathrm{cond}_1(A) \leq n^2\mathrm{cond}_\infty(A).$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

   On suppose que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. On voit alors immédiatement que

$$|x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{i_0}| = n|x_{i_0}|.$$

   (b) En déduire que pour toute matrice carrée de taille $n \times n$

$$\frac{1}{n}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty.$$

   On en déduit que pour tout $x \neq 0$,

$$\|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_1 \leq n\|Ax\|_\infty$$

   et donc en utilisant à nouveau la question précédente on obtient

$$\frac{1}{n}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1} \leq \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq n\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1} \leq n\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

   On conclut en utilisant la définition des normes induites.

   (c) Conclure. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\|A\|_\infty &\leq \|A\|_1 &&\leq n\|A\|_\infty\\ \frac{1}{n}\|A^{-1}\|_\infty &\leq \|A^{-1}\|_1 &&\leq n\|A^{-1}\|_\infty\end{aligned}$$

   Le résultat est alors immédiat.

---

**Exercice 3 (Newton)**

On considère l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f(X) = X^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de trouver les solutions de $f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Réécrire l'application $f$ comme une application $F$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. Notons $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{aligned} f(X) &= \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ (x+t)z & yz + t^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 + yz - 1 & y(x+t) \\ z(x+t) & yz + t^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On a donc $F(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x^2 + yz - 1 \\ y(x+t) \\ z(x+t) \\ yz + t^2 - 1 \end{pmatrix}$.

2. Trouver l'ensemble des solutions de $f(X) = 0$.
   On voit que soit $y = z = 0$ et $x^2 = t^2 = 1$ soit $x = -t$ et $yz = 1 - t^2$. Autrement dit on a une infinité de solutions.

3. Ecrire le premier itéré $X_1$ de l'algorithme de Newton pour l'application $f$ partant de la donnée initiale $X_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (On pourra passer par l'application $F$). Montrer que la suite $(X_k)_k$ définie par cet algorithme est définie par tout $k$ et que l'on peut écrire sous la forme $X_k = \lambda_k \mathrm{Id}$ où $(\lambda_k)_k$ est une suite réelle dont on étudiera la convergence.

   On a
$$DF(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 2x & z & y & 0 \\ y & x+t & 0 & y \\ z & 0 & x+t & z \\ 0 & z & y & 2t \end{pmatrix}.$$
   Par conséquent,
$$DF(4,0,0,4) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$
   On en déduit
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   On voit que $X_1 = \frac{17}{8}\mathrm{Id}$. Par récurrence on vérifie que
$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{1}{2\lambda_k}(\lambda_k^2 - 1) = \frac{\lambda_k^2+1}{2\lambda_k} = \phi(\lambda_k).$$
   On vérifie que $\phi'(\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$ et donc $\phi' \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ avec $\phi(1) = 1$ donc $\phi : [1,+\infty[ \to [1,+\infty[$ et $|\phi'_{|[1,\infty[}| \leq \frac{1}{2}$. On en déduit la convergence de la suite $\lambda_k$ vers 1, qui est l'unique point fixe de $\phi$ dans cet intervalle.

4. L'algorithme de Newton converge-t-il au voisinage de $X_* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ?

   On vérifie que
$$DF(-1,0,0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   est inversible. Le théorème de Newton Raphson assure la convergence locale de l'algorithme.

---

**Exercice 4 (Jacobi et optimisation)**

**Définition** Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ; on appelle **méthode de descente à pas fixe** $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ pour la minimisation de $f$, une suite définie par
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné}, \\ &\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{w}^{(k)} \end{aligned}$$
où $\boldsymbol{w}^{(k)}$ est une **direction de descente stricte** en $\boldsymbol{x}^{(k)}$, c.à.d. $\boldsymbol{w}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ vérifie la condition $\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \nabla f(x^{(k)}) < 0$.
Dans toute la suite, on considère la fonction
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} A\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1}$$
où $A$ une matrice carrée d'ordre $n$, symétrique définie positive, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$.

1. Montrer que la méthode de Jacobi pour la résolution du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ peut s'écrire comme une méthode de descente à pas fixe pour la minimisation de la fonction $f$ définie par (1). Donner l'expression du pas $\alpha$ et de la direction de descente $\boldsymbol{w}^{(k)}$ à chaque itération $k$ et vérifier que c'est bien une direction de descente stricte si $\boldsymbol{x}^{(k)} \neq A^{-1}\boldsymbol{b}$.
   La méthode de Jacobi peut s'écrire
   $$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= (\mathrm{Id} - D^{-1}A)\boldsymbol{x}^{(k)} + D^{-1}\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{x}^{(k)} + D^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)})\\ &= \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{w}^{(k)}\end{aligned}$$
   avec $\boldsymbol{w}^{(k)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}) = D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}$. On a $\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = -D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{r}^{(k)}$, et comme $A$ est s.d.p., $D^{-1}$ l'est également, et donc $\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) < 0$ si $\boldsymbol{x}^{(k)} \neq A^{-1}\boldsymbol{b}$.
2. On cherche maintenant à améliorer la méthode de Jacobi en prenant non plus un pas fixe dans l'algorithme de descente ci-dessus, mais un pas optimal qui est défini à l'itération $k$ par
   $$f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{w}^{(k)}) = \min_{\alpha > 0} f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{w}^{(k)}), \tag{2}$$
   où $\boldsymbol{w}^{(k)}$ est défini à la question précédente. On définit alors une méthode de descente à pas optimal par :
   $$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{w}^{(k)}.$$
   On appelle cette nouvelle méthode "méthode de Jacobi à pas optimal".
   (a) Justifier l'existence et l'unicité du pas optimal défini par (2), et donner son expression à chaque itération.
   Le pas optimal $\alpha_k$ est celui qui minimise la fonction $\varphi$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{w}^{(k)})$, qui est de classe $C^1$, strictement convexe et croissante à l'infini, ce qui donne l'existence et l'unicité ; de plus $\alpha_k$ vérifie :
   $$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k \boldsymbol{w}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{w}^{(k)} = 0, \text{ c.à.d. } (A\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k A\boldsymbol{w}^{(k)} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{w}^{(k)} = 0.$$
   On en déduit que (si $w^{(k)} \neq 0$)
   $$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}}{A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}} = \frac{\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}}{A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}} = \frac{\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}}{AD^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}}.$$
   (Si $w^{(k)} = 0$, on a alors $r^{(k)} = 0$ et $x^{(k)} = \bar{x}$, l''algorithme s'arrête.)
   (b) Montrer que $|f(\boldsymbol{x}^{(k)}) - f(\boldsymbol{x}^{(k+1)})| = \dfrac{|\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}|^2}{2A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}}$ si $w^{(k)} \neq 0$.
   On a :
   $$f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) = f(\boldsymbol{x}^{(k)}) - \gamma\alpha_k + \delta\alpha_k^2,$$
   avec $\gamma = \boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}$ et $\delta = \frac{1}{2}A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}$. Comme $\alpha_k$ minimise ce polynôme de degré 2 en $\alpha$, on a
   $$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) - f(\boldsymbol{x}^{(k)}) &= -\frac{\gamma^2}{4\delta}\\ &= -\frac{|\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}|^2}{2A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}},\end{aligned}$$
   d'où le résultat.
   (c) Montrer que $\boldsymbol{r}^{(k)} \to \boldsymbol{0}$ lorsque $k \to +\infty$, et en déduire que la suite donnée par la méthode de Jacobi à pas optimal converge vers la solution $\bar{\boldsymbol{x}}$ du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   On suppose que $w^{(k)} \neq 0$ pour tout $k$. La suite $(f(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et bornée inférieurement (car la fonction $f$ est bornée inférieurement). Elle est donc convergente. Ce qui prouve que $\lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) - f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = 0$.
   On sait que $\boldsymbol{w}^{(k)} = D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}$. On a donc, par la question précédente,
   $$\frac{|\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}|^2}{A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}} = \frac{|\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}|^2}{AD^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}} = 2|f(\boldsymbol{x}^{(k)}) - f(\boldsymbol{x}^{(k+1)})|.$$
   Or
   $$0 < AD^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)} \leq \zeta|\boldsymbol{r}^{(k)}|^2$$
   avec $\zeta = \|A\|_2\|D^{-1}\|_2^2$ et
   $$\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot D^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)} \geq \theta|\boldsymbol{r}^{(k)}|^2,$$
   où $\theta = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} 1/a_{i,i}$. (Les $a_{i,i}$ étant les termes diagonaux de $A$.) On en déduit que
   $$\frac{\theta^2}{\zeta}|\boldsymbol{r}^{(k)}|^2 \leq |f(\boldsymbol{x}^{(k)}) - f(\boldsymbol{x}^{(k+1)})| \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty,$$
   et donc $\boldsymbol{r}^{(k)} \to \boldsymbol{0}$ lorsque $k \to +\infty$.
   Comme $\boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}} = -A^{-1}\boldsymbol{r}^{(k)}$, on en déduit la convergence de la suite $\boldsymbol{x}^{(k)}$ vers la solution du système.

(d) On suppose que la diagonale extraite $D$ de la matrice $A$ (qui est symétrique définie positive) est de la forme $D = \alpha \mathrm{Id}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Ecrire l'algorithme de descente à pas optimal dans ce cas.

Si $D = \alpha \mathrm{Id}$, on a

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}}{A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}} = \frac{\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}}{A\boldsymbol{w}^{(k)} \cdot \boldsymbol{w}^{(k)}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{r}^{(k)}}{A\boldsymbol{r}^{(k)} \cdot \boldsymbol{r}^{(k)}}.$$

ii. Comparer les algorithmes de descente obtenus par Jacobi et Jacobi à pas optimal avec les algorithmes de gradient que vous connaissez.

Jacobi simple= algorithme de gradient avec $\rho = \frac{1}{\alpha}$

Jacobi à pas optimal= algorithme de gradient à pas optimal.