Université d'Aix-Marseille **Licence de Mathématiques Générales - L3**
Analyse numérique et optimisation (Luminy) **Année 2015-2016**

Partiel du 18 novembre 2015 – durée : 2h

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (Cours) – Norme matricielle induite par la norme euclidienne

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme vectorielle euclidienne $|.|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante notée $\|.\|_2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficients réels.

1. Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A\,A^T)} = \|A^T\|_2$.
2. En déduire que si la matrice A est normale, *i.e.* $A\,A^T = A^T A$, on a $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Exercice 2 – Convergence de la méthode de Jacobi pour une matrice s.d.p.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficients réels, symétrique définie positive et décomposée sous la forme : $A = M - N$ où M est une matrice inversible et $M^t + N$ est symétrique et définie positive.
Soit $\|.\|$ la norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ associée à A et définie par $\|x\| = \sqrt{x^t A\,x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ et $y = M^{-1} A\,x$, alors $y^t A y - 2 y^t A x < 0$.
2. Montrer que $\|M^{-1} N\,x\|^2 < \|x\|^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ différent de 0.
3. En déduire que $\rho(M^{-1} N) < 1$.
4. Pour $h > 0$, soit A_h la matrice tridiagonale (du laplacien 1-D), de diagonale principale (resp. sous-diagonale, sur-diagonale) de coefficients : $\dfrac{2}{h^2}$ (resp. $-\dfrac{1}{h^2}$, $-\dfrac{1}{h^2}$). Pour b donné dans $\mathbb{R}^n$, la méthode de Jacobi pour la résolution du système $A_h\,x = b$ définit une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Calculer l'expression de $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$.
5. Montrer que la méthode de Jacobi définie ci-dessus converge (pour tout b et $x^{(0)}$ dans $\mathbb{R}^n$).

Exercice 3 – Méthode itérative du gradient à pas fixe de Richardson

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour résoudre le système linéaire $A\,x = b$, on considère la méthode itérative définie par la suite récurrente :
$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - A\,x_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné.

1. Pour quelles valeurs de α (en fonction des valeurs propres de A) la méthode est-elle convergente pour tout choix initial x_0 ?
2. Déterminer le paramètre optimal α_0 (en fonction des valeurs propres de A) qui assure la vitesse de convergence maximale, *i.e.* tel que : $\rho(I - \alpha_0\,A) = \min\{\rho(I - \alpha\,A),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 – Méthode de Newton (ou de la tangente) pour une équation scalaire.
Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. On veut résoudre l'équation $g(x) = 0$.

1. Ecrire l'algorithme itératif de Newton pour la résolution de $g(x) = 0$.

2. Montrer que pour toute valeur initiale $x_0 < 0$, l'algorithme est bien défini.

3. Donner un $x_0 > 0$ pour lequel l'algorithme n'est pas défini.

4. Montrer que si $x_0 \in [-2, -1]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton converge vers $\overline{x} = -1$.

5. Que fait l'algorithme si $x_0 \in]-1, -1/2]$?

Exercice 5 – Méthode de Newton pour le calcul d'une racine cubique
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 2$. On cherche à déterminer la racine $\overline{x} = 2^{\frac{1}{3}}$ de l'équation $g(\overline{x}) = 0$.

1. Donner la fonction f de la méthode de Newton pour calculer $\overline{x}$ par les approximations successives définies par : $x_{k+1} = f(x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On choisit $x_0 \in [1, 2]$. Justifier que la méthode est bien définie et montrer qu'elle converge. En déduire que la vitesse de convergence est au moins quadratique (d'ordre deux).

3. Montrer que la convergence est effectivement quadratique et pas mieux.