Université d'Aix-Marseille | **Licence de Mathématiques Générales - L3**
Analyse numérique et optimisation | **Année 2016-2017**

Partiel du 16 novembre 2016 (Luminy) – durée : 2h

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 – Propriétés de positivité et de monotonie d'une matrice carrée

On rappelle qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ ou une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positif*, noté ≥ 0, si tous ses coefficients (réels) sont positifs ou nuls.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *monotone* si elle satisfait la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 0.$$

1. Montrer que si A est une matrice monotone, alors elle est inversible.
2. Montrer que A est monotone si et seulement si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.
3. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que (on dit parfois que A est une *M-matrice*) :

$$(M) \qquad a_{i,j} \leq 0,\ \forall i,j = 1,\cdots,n,\ i \neq j \quad \text{et} \quad a_{i,i} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|,\ \forall i = 1,\cdots,n,$$

   alors A est monotone.

4. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que :

$$a_{i,j} \leq 0,\ \forall i,j = 1,\cdots,n,\ i \neq j \quad \text{et} \quad a_{j,j} > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{i,j}|,\ \forall j = 1,\cdots,n,$$

   alors A est monotone.

Exercice 2 – Décomposition LL^t de Choleski d'une matrice tridiagonale s.d.p.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et tridiagonale, *i.e.* $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$.

1. Montrer que A admet une décomposition de Choleski sous la forme $A = LL^t$ où la matrice triangulaire inférieure $L = (\ell_{i,j})$ est bidiagonale, *i.e.* $\ell_{i,j} = 0$ si $j > i$ et $j < i-1$.
2. Ecrire un algorithme de calcul des coefficients $\alpha_i := \ell_{i,i}$ et $\beta_i := \ell_{i,i-1}$ de L en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A.
   Calculer le nombre d'opérations élémentaires dans ce cas tridiagonal.
3. En déduire la décomposition LL^t de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 – Méthode de Jacobi pour une matrice à diagonale dominante stricte

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale dominante stricte, *i.e.*

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad \text{pour tout} \;\; i = 1, \cdots, n.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que la méthode de Jacobi converge pour résoudre un système linéaire du type $Ax = b$.

Exercice 4 – Méthode de Jacobi pour des matrices particulières

On note I la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit un réel $\lambda > 0$.
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée vérifiant :

$$\begin{cases} a_{i,j} \leq 0, \; \forall i, j = 1, \cdots, n, \; i \neq j \\ a_{i,i} > 0, \; \forall i = 1, \cdots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0, \; \forall j = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit : $\|x\|_A := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, |x_i|$. Montrer que $\|.\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la matrice $\lambda\, I + A$ est inversible.
3. Pour $b \in \mathbb{R}^n$, on considère le système linéaire suivant :

   $$(\lambda\, I + A)u = b.$$

   Montrer que la méthode de Jacobi pour la recherche de la solution de ce système est bien définie par une suite récurrente $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que la suite $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

   $$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_A \leq \frac{1}{(1+\alpha)^k}\, \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_A,$$

   avec $\alpha > 0$ que l'on précisera.
5. Montrer que $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   En déduire qu'elle converge vers la solution u du système linéaire considéré quelque soit le choix du vecteur initial $u^{(0)}$.