

Partiel du 16 novembre 2016 (Luminy) – durée : 2h

Version avec corrigé détaillé

*Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.*

Exercice 1 – Propriétés de positivité et de monotonie d'une matrice carrée

On rappelle qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ ou une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positif*, noté ≥ 0 , si tous ses coefficients (réels) sont positifs ou nuls.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *monotone* si elle satisfait la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, Ax \geq 0 \implies x \geq 0.$$

1. Montrer que si A est une matrice monotone, alors elle est inversible.
2. Montrer que A est monotone si et seulement si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.
3. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que (on dit parfois que A est une *M-matrice*) :

$$(M) \quad a_{i,j} \leq 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j \quad \text{et} \quad a_{i,i} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|, \forall i = 1, \dots, n,$$

alors A est monotone.

4. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que :

$$a_{i,j} \leq 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j \quad \text{et} \quad a_{j,j} > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{i,j}|, \forall j = 1, \dots, n,$$

alors A est monotone.

– Corrigé –

1. En vertu du théorème du rang en dimension finie, la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son noyau $\ker(A)$ est réduit au vecteur nul de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = 0$; on a $Ax \geq 0$ et $-Ax = A(-x) \geq 0$. Comme A est monotone, il en résulte que $x \geq 0$ et $-x \geq 0$, soit $x = 0$, et donc $\ker(A) = \{0\}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ monotone, alors A est inversible d'après le point 1.
On note $(e_i)_{i=1,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $c_j := c_j(A^{-1})$ le j ème vecteur colonne de la matrice A^{-1} pour $j = 1, \dots, n$. On a pour j quelconque, $A^{-1}e_j = c_j$ et donc aussi $Ac_j = AA^{-1}e_j = e_j \geq 0$. Il vient donc avec la monotonie de A , $c_j \geq 0$ et donc $A^{-1} \geq 0$.
Réciproquement, si A est inversible telle que $A^{-1} \geq 0$. Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax \geq 0$. Comme tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls, il en résulte immédiatement que $x = A^{-1}(Ax) \geq 0$, c'est à dire que A est monotone.

3. Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y := Ax \geq 0$. On note m l'indice entre 0 et n tel que $x_m := \min_{1 \leq i \leq n} x_i$. On a :

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad \text{et en particulier} \quad y_m = \sum_{k=1}^n a_{m,k} x_k \geq 0.$$

Par minoration puisque $x_k \geq x_m$ pour tout k , il vient en utilisant l'hypothèse sur A , $|a_{m,k}| = -a_{m,k} \geq 0$ pour tout $k \neq m$:

$$\begin{aligned} a_{m,m} x_m &= y_m + \sum_{k=1, k \neq m}^n (-a_{m,k}) x_k \\ &\geq y_m + x_m \sum_{k=1, k \neq m}^n |a_{m,k}|, \end{aligned}$$

soit encore avec $y_m \geq 0$:

$$\left(a_{m,m} - \sum_{k=1, k \neq m}^n |a_{m,k}| \right) x_m = y_m \geq 0.$$

Comme A est une matrice à diagonale dominante stricte avec $a_{i,i} > 0$, on a : $a_{m,m} - \sum_{k=1, k \neq m}^n |a_{m,k}| > 0$, et donc $x_m \geq 0$. Il en résulte que $x_k \geq x_m \geq 0$ pour tout k , soit $x \geq 0$, et la matrice A est bien monotone.

4. Les hypothèses faites ici sur A sont telles que A^t vérifient les hypothèses du point 3, et donc que A^t est monotone. D'après le point 2, A^t est alors inversible et $(A^t)^{-1} \geq 0$. On obtient immédiatement que sa transposée $A = (A^t)^t$ est également inversible et $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \geq 0$, soit encore $A^{-1} \geq 0$, c'est à dire que la matrice A est bien monotone.

Exercice 2 – Décomposition LL^t de Choleski d'une matrice tridiagonale s.d.p.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et tridiagonale, *i.e.* $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$.

1. Montrer que A admet une décomposition de Choleski sous la forme $A = LL^t$ où la matrice triangulaire inférieure $L = (\ell_{i,j})$ est bidiagonale, *i.e.* $\ell_{i,j} = 0$ si $j > i$ et $j < i - 1$.
2. Ecrire un algorithme de calcul des coefficients $\alpha_i := \ell_{i,i}$ et $\beta_i := \ell_{i,i-1}$ de L en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A .
Calculer le nombre d'opérations élémentaires dans ce cas tridiagonal.
3. En déduire la décomposition LL^t de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

– Corrigé –

1. La matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant s.d.p., on a ses coefficients diagonaux tels que $(Ae_i) \cdot e_i = a_{i,i} > 0$, et on sait qu'elle admet une décomposition de Choleski $A = LL^t$ où la matrice triangulaire inférieure $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\ell_{i,j} = 0$ si $j > i$, est unique avec des coefficients diagonaux $\ell_{i,i} > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Il reste à montrer dans le cas présent où A est aussi tridiagonale, *i.e.* $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$, que L est alors bidiagonale inférieure, *i.e.* $\ell_{i,j} = 0$ si $j > i$ et $j < i - 1$.

La condition $A = LL^t$ s'écrit pour une matrice triangulaire inférieure L quelconque, soit $\ell_{i,k} = 0$ si $k > i$:

$$\sum_{k=1}^n \ell_{i,k} \ell_{j,k} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{i,k} \ell_{j,k} = a_{i,j}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Comme A est symétrique, soit $a_{i,j} = a_{j,i}$, ces égalités sont identiques en permutant i et j et on se restreint (par exemple) à la partie triangulaire inférieure de A , soit $i \geq j$.

Il vient donc pour la première colonne de A tridiagonale, soit pour $j = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 \ell_{1,k} \ell_{1,k} &= \ell_{1,1}^2 = a_{1,1} > 0, \\ \sum_{k=1}^1 \ell_{2,k} \ell_{1,k} &= \ell_{2,1} \ell_{1,1} = a_{2,1}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^1 \ell_{i,k} \ell_{1,k} = \ell_{i,1} \ell_{1,1} = 0, \quad \forall i = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

En choisissant $\ell_{1,1} > 0$, on obtient la première colonne de L :

$$\alpha_1 := \ell_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} > 0, \quad \text{puis} \quad \beta_2 := \ell_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{\ell_{1,1}}, \quad \ell_{i,1} = 0, \quad \forall i = 3, \dots, n.$$

Pour $j = 2$, on a $a_{2,2} - \ell_{2,1}^2 = a_{2,2} - a_{2,1}^2/a_{1,1} > 0$ pour A s.d.p. d'après la décomposition générale de Choleski et il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \ell_{2,k} \ell_{2,k} &= \ell_{2,1}^2 + \ell_{2,2}^2 = a_{2,2}, \quad \text{soit} \quad \ell_{2,2}^2 = a_{2,2} - \ell_{2,1}^2 > 0, \\ \sum_{k=1}^2 \ell_{3,k} \ell_{2,k} &= \ell_{3,2} \ell_{2,2} = a_{3,2}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^2 \ell_{i,k} \ell_{2,k} = \ell_{i,2} \ell_{2,2} = 0, \quad \forall i = 4, \dots, n. \end{aligned}$$

En choisissant $\ell_{2,2} > 0$, on obtient la deuxième colonne de L :

$$\alpha_2 := \ell_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - \ell_{2,1}^2} > 0, \quad \text{puis} \quad \beta_3 := \ell_{3,2} = \frac{a_{3,2}}{\ell_{2,2}}, \quad \ell_{i,2} = 0, \quad \forall i = 4, \dots, n.$$

Par récurrence sur les colonnes (par exemple) de L , supposons alors que la matrice L est bidiagonale inférieure jusqu'à la colonne $p - 1 \in \{1, \dots, n - 1\}$, *i.e.* $\ell_{i,j} = 0$ si $i \geq j + 2$ et $1 \leq j \leq p - 1$, et montrons que c'est encore vrai pour la colonne p . Comme A est tridiagonale, on a pour la colonne $j = p$ avec l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \ell_{p,k} \ell_{p,k} &= \ell_{p,p-1}^2 + \ell_{p,p}^2 = a_{p,p}, \quad \text{soit} \quad \ell_{p,p}^2 = a_{p,p} - \ell_{p,p-1}^2 > 0, \\ \sum_{k=1}^p \ell_{p+1,k} \ell_{p,k} &= \ell_{p+1,p} \ell_{p,p} = a_{p+1,p}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^p \ell_{i,k} \ell_{p,k} = \ell_{i,p} \ell_{p,p} = 0, \quad \forall i = p + 2, \dots, n. \end{aligned}$$

En choisissant $\ell_{p,p} > 0$, on obtient ainsi la p -ième colonne de L :

$$\alpha_p := \ell_{p,p} = \sqrt{a_{p,p} - \ell_{p,p-1}^2} > 0, \quad \text{puis} \quad \beta_{p+1} := \ell_{p+1,p} = \frac{a_{p+1,p}}{\ell_{p,p}}, \quad \ell_{i,p} = 0, \quad \forall i = p + 2, \dots, n.$$

En notant $\alpha_i := \ell_{i,i}$ et $\beta_i := \ell_{i,i-1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, la matrice L est donc bien bidiagonale inférieure et s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_i & \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{i+1} & \alpha_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Avec ce qui précède, l'algorithme de calcul des coefficients de L s'écrit donc colonne par colonne comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Colonne } p = 1 : & \alpha_1 = \sqrt{a_{1,1}}, \\ & \beta_2 = \frac{a_{2,1}}{\alpha_1}. \\ \text{Colonnes } p = 2, \dots, n-1 : & \alpha_p = \sqrt{a_{p,p} - \beta_p^2}, \\ & \beta_{p+1} = \frac{a_{p+1,p}}{\alpha_p}. \\ \text{Colonne } p = n : & \alpha_n = \sqrt{a_{n,n} - \beta_n^2}. \end{array} \right.$$

Le coût de cet algorithme en nombre d'opérations élémentaires s'évalue facilement :

- colonne $p = 1$: 1 racine carrée et 1 division, soit 2 opérations,
- colonnes $p = 2, \dots, n-1$: 1 multiplication, 1 soustraction, 1 racine carrée et 1 division, soit $4(n-2)$ opérations,
- colonne $p = n$: 1 multiplication, 1 soustraction et 1 racine carrée, soit 3 opérations.

Au total, la méthode de Choleski pour une matrice tridiagonale nécessite $4n-3$ opérations élémentaires.

3. En utilisant l'algorithme précédant, le calcul donne successivement : $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_3 = -1 \dots$, $\alpha_i = 1$, $\beta_{i+1} = -1 \dots$, soit :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 – Méthode de Jacobi pour une matrice à diagonale dominante stricte

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale dominante stricte, *i.e.*

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que la méthode de Jacobi converge pour résoudre un système linéaire du type $Ax = b$.

– Corrigé –

1. Grâce au théorème du rang, la matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\ker(A) = \{0\}$. Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = 0$, c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On note $m \in \{1, \dots, n\}$ l'indice tel que $|x_m| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \|x\|_\infty$. On a donc en particulier pour la ligne $i = m$:

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} x_k = a_{m,m} x_m + \sum_{k=1, k \neq m}^n a_{m,k} x_k = 0, \quad \text{soit} \quad a_{m,m} x_m = - \sum_{k=1, k \neq m}^n a_{m,k} x_k.$$

Avec l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\begin{aligned} |a_{m,m}| |x_m| &= \left| \sum_{k=1, k \neq m}^n a_{m,k} x_k \right| \leq \sum_{k=1, k \neq m}^n |a_{m,k}| |x_k| \\ &\leq |x_m| \sum_{k=1, k \neq m}^n |a_{m,k}|, \quad \text{soit} \quad \left(|a_{m,m}| - \sum_{k=1, k \neq m}^n |a_{m,k}| \right) |x_m| \leq 0. \end{aligned}$$

Comme la matrice A est à diagonale strictement dominante, on a : $|a_{m,m}| - \sum_{k \neq m} |a_{m,k}| > 0$. On en déduit que $|x_m| := \|x\|_\infty \leq 0$, soit $\|x\|_\infty = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi $\ker(A) = \{0\}$, et A est inversible.

2. Comme $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $|a_{i,i}| > 0$ et tous les coefficients diagonaux de

A sont non nuls. La matrice diagonale $D := \text{diag}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée par ses coefficients diagonaux est donc inversible. Ainsi, la méthode itérative de Jacobi pour résoudre un système linéaire du type $Ax = b$, avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné, est parfaitement définie par la suite récurrente $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{pour } x^{(0)} \text{ choisi dans } \mathbb{R}^n, \\ D x^{(k+1)} = (D - A) x^{(k)} + b, \quad \text{soit} \quad x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A) x^{(k)} + D^{-1}b, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Cette méthode converge quelque soit $x^{(0)}$ si et seulement si le rayon spectral de la matrice d'itération $B_J := I - D^{-1}A$ satisfait $\rho(B_J) := \max_{j=1, \dots, n} |\mu_j(B_J)| < 1$, en notant μ_j les valeurs propres de B_J . Soit alors un vecteur propre $v \in \mathbb{R}^n$ ($v \neq 0$) de B_J associée à une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ quelconque de B_J . On a alors $(I - D^{-1}A)v = \mu v$, soit encore $Dv - Av = \mu Dv$.

Il vient donc pour la ligne $m \in \{1, \dots, n\}$ telle que $|v_m| := \max_{j=1, \dots, n} |v_j| = \|v\|_\infty > 0$ avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\mu| |a_{m,m}| |v_m| &= \left| a_{m,m} v_m - \sum_{j=1}^n a_{m,j} v_j \right| = \left| \sum_{j=1, j \neq m}^n a_{m,j} v_j \right| \\ &\leq |v_m| \sum_{j=1, j \neq m}^n |a_{m,j}|. \end{aligned}$$

Comme $|v_m| := \|v\|_\infty > 0$ et $|a_{m,m}| > 0$, on obtient l'inégalité suivante avec la stricte dominance de la diagonale de A :

$$|\mu| \leq \frac{\sum_{j=1, j \neq m}^n |a_{m,j}|}{|a_{m,m}|} < 1.$$

Il en résulte $|\mu| < 1$ pour une valeur propre arbitraire de B_J et donc $\rho(B_J) < 1$, ce qui montre la convergence de la méthode de Jacobi (vers la solution du système $Ax = b$).

Exercice 4 – Méthode de Jacobi pour des matrices particulières

On note I la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit un réel $\lambda > 0$.

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée vérifiant :

$$\begin{cases} a_{i,j} \leq 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j \\ a_{i,i} > 0, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 0, \forall j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit : $\|x\|_A := \sum_{i=1}^n a_{i,i} |x_i|$. Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la matrice $\lambda I + A$ est inversible.
3. Pour $b \in \mathbb{R}^n$, on considère le système linéaire suivant :

$$(\lambda I + A)u = b.$$

Montrer que la méthode de Jacobi pour la recherche de la solution de ce système est bien définie par une suite récurrente $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$.

4. Montrer que la suite $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_A \leq \frac{1}{(1 + \alpha)^k} \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_A,$$

avec $\alpha > 0$ que l'on précisera.

5. Montrer que $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

En déduire qu'elle converge vers la solution u du système linéaire considéré quelque soit le choix du vecteur initial $u^{(0)}$.

– Corrigé –

1. Comme $a_{i,i} > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on vérifie facilement que $\|\cdot\|_A$ satisfait les trois propriétés d'une norme sur $\mathbb{R}^n$, i.e. pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$a) \quad \|x\|_A := \sum_{i=1}^n a_{i,i} |x_i| \geq 0, \text{ et } \|x\|_A = 0 \text{ équivaut à } |x_i| = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n, \text{ soit } x = 0.$$

$$b) \quad \|\lambda x\|_A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} |\lambda x_i| = |\lambda| \|x\|_A.$$

$$c) \quad \|x + y\|_A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} |x_i + y_i| \leq \|x\|_A + \|y\|_A.$$

Cette norme est équivalente aux normes vectorielles usuelles sur $\mathbb{R}^n$ car on est en dimension finie.

2. Avec les hypothèses sur la matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a avec $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} |\lambda + a_{j,j}| &= \lambda + a_{j,j} = \lambda - \sum_{i=1, i \neq j}^n a_{i,j} = \lambda + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{i,j}| \\ &> \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{i,j}|, \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda I + A^t = (\lambda I + A)^t$ est une matrice à diagonale strictement dominante, et donc inversible d'après le point 1 de l'Exercice 3. Il en résulte que sa transposée $(\lambda I + A)$ est également inversible, alors que A n'est pas inversible car la somme des coefficients de chaque colonne est nulle.

3. Avec les hypothèses sur A et $\lambda > 0$, on a : $\lambda + a_{i,i} > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et les coefficients diagonaux de $\lambda I + A$ sont tous non nuls. Ainsi la matrice diagonale d'ordre n , $D := \text{diag}(\lambda I + A)$ formée par les éléments diagonaux de $\lambda I + A$ est inversible. Cela permet de définir parfaitement la méthode itérative de Jacobi pour la résolution du système linéaire $(\lambda I + A)u = b$ par la suite récurrente $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \text{pour } u^{(0)} \text{ choisi dans } \mathbb{R}^n, \\ D u^{(k+1)} = (D - (\lambda I + A)) u^{(k)} + b, \quad \text{soit} \quad u^{(k+1)} = (I - D^{-1}(\lambda I + A)) u^{(k)} + D^{-1}b, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On a donc pour les composantes :

$$(\lambda + a_{i,i}) u_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} u_j^{(k)} + b_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

4. D'après l'égalité précédente, la différence entre deux itérés successifs s'écrit alors :

$$(\lambda + a_{i,i}) (u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} (u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)}), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

soit encore :

$$\left| u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)} \right| = \frac{1}{\lambda + a_{i,i}} \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} (u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)}) \right|, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient pour la norme $\|\cdot\|_A$, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\left\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \right\|_A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \left| u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)} \right| = \sum_{i=1}^n \frac{a_{i,i}}{\lambda + a_{i,i}} \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} (u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)}) \right|.$$

En remarquant que pour tout $i = 1, \dots, n$, on a la majoration :

$$0 < \frac{a_{i,i}}{\lambda + a_{i,i}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{a_{i,i}}} \leq \frac{1}{1 + \alpha} < 1, \quad \text{où} \quad \alpha := \frac{\lambda}{\max_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}} > 0.$$

Puisque $a_{j,j} = -\sum_{i \neq j} a_{i,j} = \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$, avec les hypothèses faites sur A , tous ses éléments extra-diagonaux étant négatifs, il vient donc pour tout entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \right\|_A &\leq \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \left| u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)} \right| = \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{i,j}| \right) \left| u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)} \right| \\ &\leq \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{j=1}^n a_{j,j} \left| u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)} \right| \\ &\leq \frac{1}{1 + \alpha} \left\| u^{(k)} - u^{(k-1)} \right\|_A. \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on obtient finalement l'inégalité voulue pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \right\|_A \leq \frac{1}{(1 + \alpha)^k} \left\| u^{(1)} - u^{(0)} \right\|_A, \quad \text{où} \quad \alpha := \frac{\lambda}{\max_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}} > 0.$$

5. Soient deux entiers quelconques $k, p \in \mathbb{N}$. Avec l'inégalité précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k+p)} - u^{(k)} \right\|_A &\leq \sum_{j=0}^{p-1} \left\| u^{(k+j+1)} - u^{(k+j)} \right\|_A \\ &\leq \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{(1+\alpha)^{k+j}} \left\| u^{(1)} - u^{(0)} \right\|_A = \frac{1}{(1+\alpha)^k} \left\| u^{(1)} - u^{(0)} \right\|_A \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j}. \end{aligned}$$

Pour la série géométrique convergente ($\alpha > 0$), on a

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^j} = \frac{1+\alpha}{\alpha}.$$

D'où le résultat :

$$\left\| u^{(k+p)} - u^{(k)} \right\|_A \leq \frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{1}{(1+\alpha)^k} \left\| u^{(1)} - u^{(0)} \right\|_A \longrightarrow 0, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_A)$ qui est complet car de dimension finie. Donc cette suite converge quelque soit le choix du vecteur initial $u^{(0)}$. Sa limite ne peut être que la solution u du système linéaire $(\lambda I + A)u = b$. Pour s'en convaincre, il suffit de passer à la limite dans l'égalité de récurrence définissant la méthode de Jacobi au point 3.