Université de Marseille
Licence de Mathématiques, analyse numérique
Projet, en python

Dans ce projet, on résout un modèle de diffusion thermique avec rayonnement (dans un matériau comme le verre, par exemple) avec une discrétisation par différences finies et une méthode de monotonie. Pour simplifier, on se limite à considérer le problème avec une seule dimension spatiale (un problème plus réel demande à prendre la variable spatiale dans $\mathbb{R}^3$.

Le modèle consiste à chercher la fonction u de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution du problème suivant :

$$-\frac{1}{10}u''(x) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}(u^4(x) - u^4(y))dy = 0 \text{ pour } x \in]0,1[, \tag{1}$$

$$u(0) = 1, \ u(1) = 2. \tag{2}$$

On admet que cette solution existe (en particulier, on admet qu'elle est bien continue sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$. On va calculer (de manière approchée) cette solution en utilisant une discrétisation par différences finies.

Pour $n \geq 1$, on pose $h = 1/(n+1)$. La discrétisation par différences finies de (1)-(2) consiste à chercher le vecteur u de $\mathbb{R}^n$ solution de

$$Au + R(u) = b, \tag{3}$$

avec A, $R(u)$ donnés par :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A[i,i] = 2/(10h^2)$, $A[i,j] = -1/(10h^2)$ si $|i-j| = 1$ et $A[i,j] = 0$ si $|i-j| > 1$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.
- $R(u) \in \mathbb{R}^n$ et pour $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$R(u)_i = \sum_{j \in \{1,\ldots,n\},\, j \neq i} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{|i-j|}}(u_i^4 - u_j^4) + \frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{i}}(u_i^4 - 1) + \frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{n+1-i}}(u_i^4 - 16),$$

- $b \in \mathbb{R}^n$, $b_1 = 1/(10h^2)$, $b_n = 2/(10h^2)$, $b_i = 0$ pour $1 < i < n$.

Pour trouver une solution de (3), on se donne $\beta \geq 0$ et on utilise la méthode itérative suivante :

Initialisation $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $u_i^{(0)} = 1$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Itérations Pour $k \geq 0$, $Au^{(k+1)} + \beta u^{(k+1)} = -R(u^{(k)}) + \beta u^{(k)} + b$.

1. Expliquer pourquoi (3) peut être vu comme une discrétisation de (1)-(2).
2. Ecrire un programme réalisant la méthode itérative indiquée avec un test d'arrêt des itérations utilisant que la norme infinie de $(u^{(k+1)} - u^{(k)})$ est inférieure à une valeur donnée ε et un nombre maximal d'itérations.
3. Pour $\varepsilon = 10^{-7}$ et plusieurs valeurs de n (par exemple $n = 5$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 200$, $n = 500$), on s'intéresse au comportement de l'algorithme en fonction des valeurs de β.

   (a) L'algorithme converge-t-il pour $\beta = 0$?

(b) Constater qu'il existe $\beta_n > 0$ pour lequel, si $\beta \geq \beta_n$, la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge et que cette convergence est monotone (c'est-à-dire que $u^{(k+1)} \geq u^{(k)}$ pour tout k).

[On peut effectivement montrer qu'un tel β_n existe et qu'il peut même être choisi indépendamment de n. Une démonstration simple, donnée dans le polycopié du cours dans un cadre plus général, montre que $\beta_n = 64\sqrt{2}$ convient. En fait, la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge de manière monotone pour des valeurs de β bien inférieures à $64\sqrt{2}$.]

(c) Lorsque la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, la solution (approchée) obtenue dépend-elle de β ?

(d) Comment varie, en fonction de β, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la solution approchée ? Donner pour plusieurs choix de β ce nombre d'itérations.

(e) Donner le graphe de la solution approchée pour plusieurs valeurs de n.

4. Une discrétisation légèrement différente du terme intégral dans (1) donne le choix suivant de $R(u)$:

$$
\begin{aligned}
R(u)_i = & \sum_{j\in\{1,\ldots,n\},\, j\neq i} \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{|i-j|+1/2}+\sqrt{|i-j|-1/2}}(u_i^4 - u_j^4) \\
& + \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{i}+\sqrt{i-0.5}}(u_i^4 - 1) + \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{n+1-i}+\sqrt{n+1-i-0.5}}(u_i^4 - 16),
\end{aligned}
$$

Ce nouveau choix de $R(u)$ change-t-il significativement la valeur de β_n (de la question 3) ? Le nombre d'itérations nécessaires ? la solution obtenue ?

5. On remplace maintenant dans (1) le coefficient $1/10$ par 1. Donner le graphe de la solution approchée pour plusieurs valeurs de n.