Université de Marseille
Licence de Mathématiques, analyse numérique
Travaux Pratiques 1, en python

Exercice 1 (Résolution numérique de $-u'' = f$)
Pour $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ donné, on cherche à calculer de manière approchée, par un schéma aux Différences Finies, la solution, notée u, du problème suivant :

$$-u''(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[,$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

On note h le pas du maillage, $h = 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^\star$. le problème discrétisé est donc de la forme $A_h u_h = f_h$, où est une matrice carré de taille n et u_h, f_h sont des vecteurs de taille n (voir le cours pour plus de précisions). L'erreur de discrétisation est donnée par la norme infinie du vecteur $(u_a - u_e)$ où u_e est le vecteur formé par la solution exacte prise aux points du maillage.
On choisit pour second membre la fonction f définie par $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
   (a) Ecrire un programme construisant la matrice A_h.
   [Pour écrire un programme efficace pour de très grandes valeurs de n, les courageux pourront construire A_h sous forme d'une matrice creuse, par exemple avec la structure **scipy.sparse.lil_matrix**.]
   (b) Contruire le vecteur f_h.
   (c) Calculer le vecteur u_h en utilisant une résolution directe.
   [Dans le cas de l'utilisation d'une matrice creuse, on pourra mettre la matrice A_h sous la forme **csr** avec l'instruction **yy=xx.tocsr()** et utiliser le solveur **scipy.sparse.linalg.spsolve**.]
2. Vérifier que la méthode est bien convergente d'ordre 2.
   [En prenant, par exemple, $n+1 = 100$ et $n+1 = 200$, l'erreur de discrétisation est essentiellement divisée par 4.]

Exercice 2 (Décomposition LU et Cholesky)

On pose $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer la décomposition de Cholesky de la matrice A et constater la conservation du profil. [On pourra utiliser **linalg.cholesky**.]
2. Calculer les mineurs principaux de la matrice B et en déduire qu'on peut utiliser, pour cette matrice, la décomposition LU. [On pourra utiliser **linalg.det**.]
3. Calculer la décomposition LU de la matrice B et constater la conservation du profil. [On pourra utiliser **scipy.linalg.lu**.]

Exercice 3 (Le ballon de Foot) L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de faces d'un ballon de foot. Un ballon de foot est formée de faces de forme pentagonales ou hexagonales. On notera x le nombre de pentagones et y le nombre d'hexagones qui le constituent. On notera f le nombre total de faces, a le nombre d'arêtes et s le nombre de sommets du ballon. Ces nombres sont des entiers positifs.
Pour déterminer x et y, on écrit les relations suivantes :

- chaque sommet appartient à exactement trois faces, $3s = 5x + 6y$,
- chaque arête est partagée par deux faces, $2a = 5x + 6y$,
- le nombre total de faces est égal à la somme des nombres de pentagones et hexagones, $f = x + y$,
- (relation d'Euler) le nombre total d'arêtes est égal à la somme du nombre de faces et du nombre de sommets moins 2, $a = f + s - 2$.

1. On note X le vecteur de $\mathbb{R}^5$ dont les composantes sont x, y, f, a, s. Montrer que X est solution d'un système linéaire de 4 équations (à 5 inconnues) de la forme $AX = b$.

2. Trouver (avec python) les solutions entières du système linéaire de la question précédente. On pourra (comprendre et) programmer l'algorithme suivant consistant a échelonner la matrice A en notant n le nombre de lignes de A (ici $n = 4$) et p le nombre de colonnes (ici $p = 5$). Le second membre b est donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note l_{i-1} la i-ieme ligne de A

   $i = 0$

   Pour j de 0 à $p - 1$:

   choisir, si c'est possible, k entre i et $n - 1$ tel que $a_{k,j} \neq 0$.

   échanger l_i et l_k

   échanger b_i et b_k

   Pour m de $i + 1$ à $n - 1$:

   avec $c = a_{m,j}/a_{i,j}$,

   remplacer l_m par $l_m - c\, l_i$,

   remplacer b_m par $b_m - c\, b_i$

   $i = i + 1$

3. Sachant que le ballon de foot correspond à $y = 20$, donner x, f, a et s.