Université de Marseille
Licence de Mathématiques, analyse numérique
Travaux Pratiques 1, en python

Exercice 1 (Résolution numérique de $-u'' = f$)
Pour $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ donné, on cherche à calculer de manière approchée, par un schéma aux Différences Finies, la solution, notée u, du problème suivant :

$$\begin{aligned} -u''(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

On note h le pas du maillage, $h = 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^\star$. le problème discrétisé est donc de la forme $A_h u_h = f_h$, où est une matrice carré de taille n et u_h, f_h sont des vecteurs de taille n (voir le cours pour plus de précisions). L'erreur de discrétisation est donnée par la norme infinie du vecteur $(u_a - u_e)$ où u_e est le vecteur formé par la solution exacte prise aux points du maillage.
On choisit pour second membre la fonction f définie par $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
   (a) Ecrire un programme construisant la matrice A_h.
   (b) Contruire le vecteur f_h.
   (c) Calculer le vecteur u_h en utilisant une résolution directe.
2. Vérifier que la méthode est bien convergente d'ordre 2.
   [En prenant, par exemple, $n + 1 = 100$ et $n + 1 = 200$, l'erreur de discrétisation est essentiellement divisée par 4.]

Exercice 2 (Décomposition LU et Cholesky)
On pose $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer la décomposition de Cholesky de la matrice A et constater la conservation du profil. [On pourra utiliser **linalg.cholesky**.]
2. Calculer les mineurs principaux de la matrice B et en déduire qu'on peut utiliser, pour cette matrice, la décomposition LU. [On pourra utiliser **linalg.det**.]
3. Calculer la décomposition LU de la matrice B et constater la conservation du profil. [On pourra utiliser **scipy.linalg.lu**.]

Exercice 3 (Nombre de solutions pour un système linéaire)
Pour une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ donnés, écrire un programme d'échelonnement du système linéaire $Ax = b$ donnant les deux résultats suivants :

1. La dimension du noyau de A,
2. une solution du système si il en existe (sinon le programme affiche “pas de solution”).

Tester le programme sur les cas suivants ;

1. A est la matrice donnée à l'exercice 1 avec $h = 1/(n+1)$ (c'est-à-dire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $n = 10$ et $b_i = 1$ pour tout i.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   Donner la solution correspondant à $x_5 = 60$. (Cette solution est formée de nombres entiers positifs. Elle correspond au problème d'un ballon formée de faces de formes pentagonales ou hexagonales. x_1 est le nombre de faces pentagonales de ce ballon, x_2 le nombre de faces hexagonales, x_3 le nombre total de faces, x_4 le nombre d'arêtes et x_5 le nombre de sommets.)

On rappelle le principe de l'échelonnement :
(l_{i-1} est i-ieme ligne de A et b_{i-1} la i-ieme composante de b)
$i = 0$
pour j de 0 à $p - 1$:
  choisir, si c'est possible, k entre i et $n - 1$ tel que $a_{k,j} \neq 0$.
  échanger l_i et l_k
  échanger b_i et b_k
  avec $c = a_{i,j}$,
  remplacer l_i par l_i/c
  remplacer b_i par b_i/c
    Pour m de $i + 1$ à $n - 1$:
    avec $c = a_{m,j}$,
    remplacer l_m par $l_m - c\, l_i$,
    remplacer b_m par $b_m - c\, b_i$
  $i = i + 1$