Université de Marseille
Licence de Mathématiques, analyse numérique
Travaux Pratiques 4, en python

Exercice 1 (Méthode de la puissance)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. on suppose qu'il existe λ valeur propre simple de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et $|\mu| < |\lambda|$ pour toutes les valeurs propres μ de A autres que λ (noter que λ est alors nécesairement réelle).
La méthode de la puissance permet alors d'approcher λ. On rappelle que l'idée consiste, en partant d'un vecteur $x^{(0)}$ de $\mathbb{R}^n$, à construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle que $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}/|Ax^{(k)}|$. (On rappelle que $|x|$ désigne ici la norme euclidienne habituelle du vecteur x de $\mathbb{R}^n$.)
Si $Ax^{(k)} \neq 0$ pour tout k (si qui est généralement le cas), on peut montrer que, sauf pour des choix particuliers de $x^{(0)}$, $Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$ tend vers λ quand k tend vers $+\infty$.

1. Ecrire en python une fonction ayant pour argument une matrice A et un nombre d'itérations et donnant en retour la valeur de $Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$ lorsque k est égal au nombre d'itérations (on espère donc que cette valeur est une approximation de la valeur propre de A dont la valeur absolue est le rayon spectral).

2. On considère les deux matrices que nous avons déjà vue dans les tp précédents,
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$
et, pour $n = 10$, A_n donnée par $A_n[i,i] = 2/(h^2)$, $A_n[i,j] = -1/(h^2)$ si $|i-j| = 1$ et $A_n[i,j] = 0$ si $|i-j| > 1$.

   A l'aide de la fonction construite dans la question 1, calculer le rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$ pour les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel appliquées aux deux matrices A et A_n (pour $n = 10$). On rappelle que, avec les notations habituelles, pour la méthode de Jacobi, $M = D$ et $N = E + F$ et, pour la méthode de Gauss-Seidel, $M = D - E$ et $N = F$.

3. Dans la méthode de la puissance décrite ci dessus, pourquoi ne peut-on remplacer la norme euclienne (c'est-à-dire $|\cdot|$) par une autre norme usuelle de $\mathbb{R}^n$, par exemple la norme notée habituellement $\|\cdot\|_1$?

Exercice 2 (Méthode QR)
On rappelle que la méthode QR est une méthode qui permet de trouver (souvent, mais pas toujours) de manière approchée les valeurs propres d'une matrice. Elle utilise la décomposition QR d'une matrice (c'est-à-dire que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure). L'algorithme de la méthode QR, pour une matrice donnée A, est le suivant, avec une valeur ε petite (par exemple $\varepsilon = 10^{-6}$) :
Mettre A dans B. Puis, tant que les coefficients sous la diagonale de B sont supérieure à ε calculer la décomposition QR de B (utiliser **numpy.linalg.qr**) et poser $B = RQ$.
Pour de nombreuses matrices, l'algorithme donne, sur la diagonale de B, une approximation des valeurs propres de A.

1. Ecrire en python une fonction ayant pour argument une matrice A et un nombre ε et donnant en retour la matrice B obtenue par la méthode QR (mettre dans la fonction un nombre maximum d'itérations, par exemple 1000, pour le cas où la méthode ne converge pas).

2. Constuire une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ avec des coefficients aléatoires [utiliser **numpy.random**] et poser $P = M^t M$.

3. S'assurer que la matrice P obtenue dans la question 2 est inversible (ce qui est, en général, le cas) et poser, pour $i = 1, 2, 3$, $A_i = P D_i P^{-1}$ avec

$$D_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Utiliser la fonction de la question 1 pour calculer une approximation des valeurs propres de A_1, A_2 et A_3 de la question 3.

5. On pose $A_4 = P D_4 P^{-1}$ avec P donnée à la question 2 et $D_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Utiliser la fonction de la question 1 avec A_4. Trouve-t-on les valeurs propres de A_4 ?

   Calculer les valeurs propres de la sous-matrice composée des deux dernières colonnes et des deux dernières lignes du résultat de la fonction de la question 1 avec A_4. Retrouve-t-on les valeurs propres de A_4 ?