Université de Marseille
Licence de Mathématiques, analyse numérique
Travaux Pratiques 5, en python

Exercice 1 (Point fixe et Newton)
On cherche à calculer $\bar{x} = \sqrt{3}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = x^2 - 3$ et $f(x) = x - g(x)$.

1. Programmer la méthode du point fixe (c'est-à-dire $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$). Appliquer cette méthode à la fonction f en partant de $x_0 = 1$. La méthode converge-t-elle avec ce choix de x_0 ?

2. Programmer la méthode du point fixe avec relaxation pour la fonction f avec un paramètre ω compris entre 0 et 1 (c'est-à-dire $x_{n+1} = \omega f(x_n) + (1-\omega)x_n$ pour $n \geq 0$). Utiliser un test d'arrêt sur le résidu avec $\varepsilon = 10^{-7}$ et un nombre maximal d'itérations (par exemple 1000).

   On choisit $x_0 = 1$ et $\omega = i/10$, $i = 1, \ldots 10$. Donner, selon la valeur de ω, lorsque la méthode converge (c'est-à-dire lorsque la méthode s'arrête avec un résidu inférieur à 10^{-7}) le nombre d'itérations nécessaires.

   Même question avec $x_0 = 2$, $x_0 = 4$, $x_0 = 8$.

   Lorsque la méthode converge, donner la vitesse de convergence.

   Il existe une valeur de ω pour laquelle la convergence est d'ordre 2. Quelle est cette valeur ? Donner le nombre d'itérations nécessaires (c'est-à-dire lorsque la méthode s'arrête avec un résidu inférieur à 10^{-7}) avec cette valeur de ω.

3. Programmer la méthode de Newton pour trouver $\sqrt{3}$ comme solution de $g(x) = 0$ avec un test d'arrêt et un nombre maximal d'itérations. Tester la méthode pour $x_0 = 1,\ 2,\ 4,\ 8$. Donner, dans chaque cas, le nombre d'itérations.

Exercice 2 (Equation du pendule non linéarisée)
Dans cet exercice, on s'intéresse au système différentiel

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ t > 0, \tag{1}$$
$$x(0) = x^{(0)}. \tag{2}$$

L'inconnue est la fonction x de $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La fonction f est une fonction donnée de $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Le temps final T et la donnée initiale $x^{(0)}$ sont connues (avec $T > 0$ et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$).
Pour calculer une approximation de $x(t)$, $t \in [0, T]$, on se donne un pas de temps $h = T/N$ (avec $N \in \mathbb{N}^\star$) et on calcule des approximations de x aux points $t_n = nh$, $n = 1, \ldots, N$, avec le schéma de Crank-Nicolson qui s'écrit (on rappelle que $x^{(0)}$ est donné) :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{h}{2}(f(t_n, x^{(n)}) + f(t_{n+1}, x^{(n+1)})),\ \text{pour } n \geq 0.$$

On note z_1, z_2 les deux composantes d'un vecteur z de $\mathbb{R}^2$ et on considère comme fonction f la fonction

$$f(t, z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\mathrm{sin(z_1)} + \varepsilon \mathrm{sin(t)} \end{bmatrix},$$

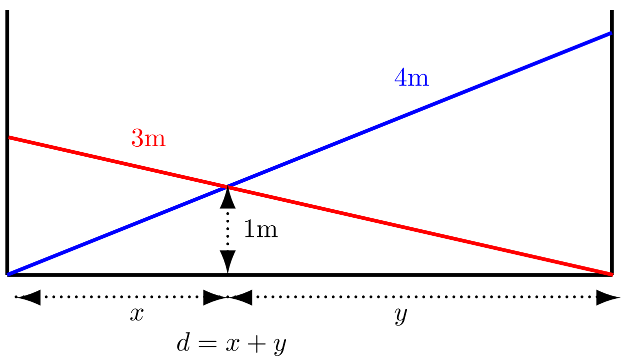
avec $\varepsilon > 0$ donné. On choisit $T = 200$ et $x^{(0)} = 0$.

1. Programmer le schéma de Crank-Nicolson en utilisant pour chaque valeur de n (entre 0 et $N-1$) la calcul de $x^{(n+1)}$ avec la méthode de Newton.

2. On prend dans cette question $\varepsilon = 0.05$ et deux valeurs de h, $h = 0.02$ et $h = 0.01$. Pour chacune des valeurs de h, donner le graphe de $x_1(t)$ lorsque $t \in [0, T]$. Le fait de prendre ces valeurs de h vous indique-t-il que la solution obtenue est proche de la solution exacte ?

3. On prend dans cette question $\varepsilon = 1$ et $h = 0.01$. Donner le graphe de $x_1(t)$ lorsque $t \in [0, T]$. Ce graphe vous suggère le comportement de la solution exacte quand $t \to +\infty$?

Exercice 3 (Méthode de Newton pour un système 2×2)



Deux échelles de longueurs respectives 3 et 4m sont posées contre deux murs verticaux selon la figure ci-dessus. On sait que les échelles se croisent à 1m du sol. On cherche à connaîre la distance d entre les deux murs.

1. Montrer que le problème revient à déterminer x et y tels que

$$16x^2 = (x^2+1)(x+y)^2, \tag{3}$$
$$9y^2 = (y^2+1)(x+y)^2. \tag{4}$$

2. Ecrire en python l'algorithme de Newton pour la résolution du système (3)-(4) en partant d'un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées x_0, y_0 et en mettant un test d'arrêt sur le résidu et sur la différence entre deux itérées successives.

3. Calculer avec l'algorithme de la question 2 la solution du système (3)-(4) en partant de $x_0 = y_0 = 1$. Donner le nombre d'iérations. Donner la variation du nombre d'itérations en fonction de la sévérité du test d'arrêt.