Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
Examen du 7 janvier 2021

Exercice 1 (Schéma de Heun, barème 2 points)**.**
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On cherche à approcher la solution du problème de Cauchy autonome

$$x'(t) = f(x(t)) \text{ pour tout } t > 0,$$
$$x(0) = x_0,$$

par le schéma numérique suivant, où h est le pas (uniforme) de discrétisation en temps :
$x^{(0)} = x_0$, puis pour $x^{(n)}$ connu, $n \geq 0$:

$$\bar{x}^{(n+1)} = x^{(n)} + hf(x^{(n)}),$$
$$\bar{\bar{x}}^{(n+1)} = x^{(n)} + hf(\bar{x}^{(n+1)}),$$
$$x^{(n+1)} = \frac{1}{2}(\bar{x}^{(n+1)} + \bar{\bar{x}}^{(n+1)})$$

Montrer que ce schéma est le schéma de Heun vu en cours (c'est-à-dire que la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que celle donnée par le schéma de Heun).

Corrigé – *En sommant les équations donnant $\bar{x}^{(n+1)}$ et $\bar{\bar{x}}^{(n+1)}$, on obtient*

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{2}(x^{(n)} + hf(x^{(n)}) + x^{(n)} + hf(\bar{x}^{(n+1)})) = x^{(n)} + \frac{h}{2}(f(x^{(n)}) + f(x^{(n)} + hf(x^{(n)}))),$$

ce qui donne bien la formule du schéma de Heun.

On suppose maintenant que le problème est non autonome, c'est-à-dire que l'on remplace $f(x(t))$ par $f(t, x(t))$. Dans la schéma ci dessus on remplace alors $f(x^{(n)})$ par $f(t_n, x^{(n)})$ et $f(\bar{x}^{(n+1)})$ par $f(t_n, \bar{x}^{(n+1)})$ ou $f(t_{n+1}, \bar{x}^{(n+1)})$, où $t_n = nh$. L'un de ces deux schémas donne t-il la même solution que le schéma de Heun vu en cours ? Si oui, lequel ?

Corrigé – *Si on remplace $f(x^{(n)})$ par $f(t_n, x^{(n)})$ et $f(\bar{x}^{(n+1)})$ par $f(t_n, \bar{x}^{(n+1)})$ on obtient*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_n, x_n + hf(t_n, x_n))).$$

Si on remplace $f(x^{(n)})$ par $f(t_n, x^{(n)})$ et $f(\bar{x}^{(n+1)})$ par $f(t_{n+1}, \bar{x}^{(n+1)})$ on obtient

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))).$$

Ce deuxième schéma donne bien le schéma de Heun vu en cours.

Exercice 2 ($AB = BA$ versus $e^A e^B = e^B e^A$, barème 9 points)**.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{tA} - I}{t} = A.$$
En déduire que $AB = BA$ si et seulement si $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ pour tout $t > 0$. [L'une des implications a été faite en cours.]

   Corrigé – *L'application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M(t) = e^{tA}$ vérifie $M'(t) = AM(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $M(0) = I$, on en déduit*
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{tA} - I}{t} = M'(0) = AM(0) = A.$$
   On suppose que $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ pour tout $t > 0$. On en déduit que pour tout $t > 0$,
$$\frac{e^{tA} - I}{t}\frac{e^{tB} - I}{t} = \frac{e^{tB} - I}{t}\frac{e^{tA} - I}{t}.$$
   En passant à la limite dans cette égalité quand $t \to 0$, $t > 0$, on obtient (par continuité du produit de matrices) $AB = BA$.
   L'autre implication a été faite en cours.

2. On suppose que $A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer les solutions du système différentiel $X' = AX$ et en déduire que $e^A e^B = e^B e^A$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Corrigé – *On note x et y les deux composantes de X, le système $X' = AX$ sécrit alors $x' = 2\pi y$, $y' = -2\pi x$, ce qui donne*

   $$x'' + (2\pi)^2 x = 0.$$

   La solution générale de cette équation différentielle est $x(t) = \alpha cos(2\pi t) + \beta sin(2\pi t)$ et donc $y(t) = -\alpha sin(2\pi t) + \beta cos(2\pi t))$. Ceci montre que $X(1) = X(0)$. Comme $X(t) = e^{tA}X(0)$ (et que $X(0)$ est arbitraire dans $\mathbb{R}^2$), on a donc $e^A = I$. Ceci donne bien $e^A e^B = e^B e^A$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Donner un exemple pour lequel $AB \neq BA$.

   Corrigé – *Un exemple possible est $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

3. Pour $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a \neq 0$, on pose $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer e^B et e^C.

   Corrigé – *On note x et y les deux composantes de X et on résout le système $X' = BX$, c'est-à-dire $x' = y$, $y' = ay$. Ceci donne*

   $$y(t) = y(0)e^{at},\ x(t) = \alpha + \beta e^{at},$$

   avec $a\beta = y(0)$ et $\alpha + \beta = x(0)$, c'est-à-dire $\beta = y(0)/a$, $\alpha = x(0) - y(0)/a$ et donc
   $x(t) = (x(0) - y(0)/a) + (y(0)/a)e^{at} = x(0) + y(0)((e^{at} - 1)/a)$,

   $$X(t) = e^{tB}X(0),\ avec\ e^{tB} = \begin{bmatrix} 1 & (e^{at}-1)/a \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}.$$

   On résout maintenant le système $X' = CX$, c'est-à-dire $x' = ax + y$, $y' = 0$. Ceci donne

   $$y(t) = y(0),\ x(t) = \alpha e^{at} + \beta,$$

   avec $a\beta + y(0) = 0$ et $\alpha + \beta = x(0)$, c'est-à-dire $\beta = -y(0)/a$, $\alpha = x(0) + y(0)/a$ et donc
   $x(t) = (x(0) + y(0)/a)e^{at} - y(0)/a = x(0)e^{at} + y(0)((e^{at} - 1)/a)$,

   $$X(t) = e^{tC}X(0),\ avec\ e^{tC} = \begin{bmatrix} e^{at} & (e^{at}-1)/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   $e^B = \begin{bmatrix} 1 & (e^a-1)/a \\ 0 & e^a \end{bmatrix}$, $e^C = \begin{bmatrix} e^a & (e^a-1)/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) on pose maintenant $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, de sorte que $C = A + B$. Montrer que pour $a = 2\pi i$, $e^{A+B} = e^A e^B$. Les matrices A et B commutent-elles ?

   Corrigé – *Pour $a = 2\pi i$, la question précédente donne $e^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e^{A+B} = e^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Comme A est une matrice diagonale, $e^A = \begin{bmatrix} e^{2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i} \end{bmatrix} = I$. On a bien $e^{A+B} = e^A e^B$.*

   Les matrices A et B ne commutent pas, $AB = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}$ et $BA = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}$.

Exercice 3 (Système linéaire non homogène, barème 3 points). Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in Sp(A)$ et $\psi \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ par $G(t) = e^{\lambda t}\psi$ (pour $t \in \mathbb{R}$).
On s'intéresse au système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + G(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de (1) sous la forme $X(t) = e^{\lambda t}\varphi$ (avec $\varphi \in \mathbb{R}^n$) si et seulement si $\psi \in \mathrm{Im}(A - \lambda I)$.

   Corrigé – *Soit $\varphi \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = e^{\lambda t}\varphi$ de sorte que $X'(t) - AX(t) = e^{\lambda t}(\lambda I - A)\varphi$. La fonction X est donc solution de (1) si et seulement si $(\lambda I - A)\varphi = \psi$. Un tel vecteur φ existe si et seulement si $\psi \in \mathrm{Im}(A - \lambda I)$.*

2. Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de (1) sous la forme $X(t) = te^{\lambda t}\varphi$ (avec $\varphi \in \mathbb{R}^n$) si et seulement si $\psi \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.

   Corrigé – *Soit $\varphi \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = te^{\lambda t}\varphi$ de sorte que $X'(t) - AX(t) = te^{\lambda t}(\lambda I - A)\varphi + e^{\lambda t}\varphi$. La fonction X est donc solution de (1) si et seulement si $\varphi = \psi$ (en prenant $t = 0$) et $(\lambda I - A)\varphi = 0$. Ceci est possible si et seulement si $\psi \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.*

Exercice 4 (Système non linéaire, barème 14 points).
Soient $x_0 \geq 0$ et $y_0 \geq 0$. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (1 - x(t))y(t),\ t > 0, \\ y'(t) &= y(t)(x(t) - y(t)),\ t > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0. \tag{3}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale $(x, y) \in C^1([0, T_m[, \mathbb{R}^2)$ (avec $T_m > 0$) de (2)-(3).

   Corrigé – *En notant X la fonction dont les composantes sont x et y, le système (2) s'écrit $X'(t) = F(X(t))$ avec F de classe C^1. On en déduit que (2)-(3) admet une unique solution maximale.*

Dans toute la suite on note (x, y) la solution maximale de (2)-(3) (elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$).

2. Donner l'ensemble des points d'équilibre du système (2) (c'est-à-dire les couples (x_0, y_0) pour lesquels $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ pour tout $t \geq 0$ est solution de (2)-(3)). Pour chaque point d'équilibre, calculer le système linéarisé et en déduire, si cela est possible, la stabilité ou l'instabilité du point d'équilibre.

   Corrigé – *Les points d'équilibre sont les points $(a, 0)$, avec $a \geq 0$, et le point $(1, 1)$. La matrice jacobienne de F au point (a, b) est*

   $$J_F(a, b) = \begin{bmatrix} -b & 1-a \\ b & a-2b \end{bmatrix}.$$

   Pour $a \geq 0$ et $b = 0$, $J_F(a, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1-a \\ 0 & a \end{bmatrix}$.
   Si $a > 0$, le point $(a, 0)$ est instable. Si $a = 0$, l'étude du problème linéarisé ne permet pas de conclure à la stabilité ou l'instabilité de ce point.
   Pour $a = b = 1$, $J_F(1, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
   Le point $(1, 1)$ est asymptotiquement stable.

3. On suppose dans cette question que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$ puis montrer que $x(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.

Corrigé – *Les points $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, sont des points d'équilibre. Cela suffit pour affirmer que, si $y_0 > 0$, $y(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.*

On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $x(t) \leq 0$ et on pose $\bar{t} = \inf\{t > 0,\, x(t) \leq 0\}$. Par continuité de x, on a $\bar{t} > 0$ et $x(\bar{t}) = 0$. Comme $x(t) > 0$ pour $t < \bar{t}$, $x'(\bar{t}) \geq 0$. Mais $x'(\bar{t}) = (1 - x(\bar{t}))y(\bar{t}) > 0$, ce qui est impossible. On a donc bien $x(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.

4. On suppose dans cette question que $x_0 = 1$. Montrer que $T_m = +\infty$ et donner les fonctions x et y.

   Corrigé – *La solution est $x(t) = 1$ pour $0 \leq t < T_m$ et y est la solution maximale de*
   $$y'(t) = y(t)(1 - y(t)),\ t > 0,$$
   $$y(0) = y_0.$$
   Cette solution (déjà vu en cours et en td) est
   $$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-t}}$$
   et $T_m = +\infty$.

On pose $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2,\, b > 0,\ a < 1,\ a > b\}$ (il peut être utile de dessiner l'ensemble D).
On suppose pour toute la suite de l'exercice que $(x_0, y_0) \in D$.

5. Montrer que $y(t) > 0$ et $x(t) < 1$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

   Corrigé –
   La question 3 donne $y(t) > 0$ pour tout t. Puis comme (grâce à la question 4) toute la demi droite $\{(1, y),\, y > 0\}$ est formée de trajectoires du système différentiel et que $x_0 < 1$, on a bien $x(t) < 1$ pour tout t.

6. Montrer que $x(t) > y(t)$ (et donc $x(t), y(t) \in D$) pour tout $t \in [0, T_m[$.
   [On pourra remarquer que $(x - y)'(t) > 0$ si $x(t) = y(t)$ avec $t \in [0, T_m[$.]
   En déduire que $T_m = +\infty$.

   Corrigé – *On raisonne comme à la question 3. On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $x(t) \leq y(t)$ et on pose $\bar{t} = \inf\{t > 0,\, x(t) \leq y(t)\}$. Par continuité de x et y, on a $\bar{t} > 0$ et $x(\bar{t}) = y(\bar{t})$. Comme $x(t) - y(t) > 0$ pour $t < \bar{t}$, $x'(\bar{t}) - y'(\bar{t}) \leq 0$. Mais $x'(\bar{t}) - y'(\bar{t}) = 1 - 2x(\bar{t}))y(\bar{t}) + y^2(\bar{t}) = 1 - x^2(\bar{t}) > 0$, ce qui est impossible. On a donc bien $x(t) > y(t)$ pour tout $0 \leq t < T_m$.*

   On a donc $(x(t), y(t)) \in D$ pour tout $0 \leq t < T_m$. Comme D est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, ceci montre que $T_m = +\infty$.

7. Montrer que la fonction y est croissante et que $y_0 \leq y(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$.

   Corrigé – *$y'(t) = y(t)(x(t) - y(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et $y(t) < x(t) < 1$ pour tout t. La fonction y est donc croissante bornée strictement par 1, ce qui donne bien $y_0 \leq y(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$.*

8. Pour tout $t \geq 0$, on pose $z(t) = 1 - x(t)$. Donner l'équation différentielle satisfaite par z. En déduire qu'il existe C et γ (ne dépendant que de y_0) tels que $0 \leq z(t) \leq Ce^{-\gamma t}$ pour tout $t \geq 0$.

   Corrigé – *$z'(t) = -x'(t) = -y(t)z(t)$. Comme $z(t) > 0$ et $y(t) \geq y_0 > 0$, on en déduit que $z'(t) < -y_0 z(t)$. On pose $\gamma = y_0$ et $u(t) = z(t)e^{\gamma t}$ de sorte que $u'(t) = (z'(t) + \gamma z(t))e^{\gamma t} < 0$ et donc $u(t) \leq u(0) = z(0) = 1 - x_0$ pour tout $t \geq 0$. En posant $C = 1 - x_0$, on obtient $0 \leq z(t) \leq Ce^{-\gamma t}$ pour tout $t \geq 0$.*

9. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.

   Corrigé – *La question 8 donne $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$ et donc $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Puis, comme la fonction y est croissante bornée par 1, elle a une limite en $+\infty$ notée ℓ (avec $y_0 < \ell \leq 1$). Le point $(1, \ell)$ est donc nécessairement un point d'équilibre (proposition 6 du cours), ce qui prouve que $\ell = 1$.*