

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3^{ème} année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06C. Examen du 17 juin 2021

Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.

Exercice 1 (Existence, unicité, stabilité pour une équation différentielle. Barème 16 points).

Soit $a \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ t.q. $1 \leq a(t) \leq 2$ pour tout $t \geq 0$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$y'(t) = a(t)y^2(t) - y^3(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(0) = y_0. \quad (2)$$

1. Montrer que le problème (1)-(2) admet une unique solution maximale. Dans la suite, on note y cette solution maximale. Elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$.

Corrigé – Cette question est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. On suppose dans cette question que $y_0 < 0$. Montrer que $y(t) \leq 0$ pour tout $t < T_m$. En déduire que y est une fonction croissante, que $T_m = +\infty$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Corrigé – Comme 0 est un point d'équilibre de (1), on a même $y(t) < 0$ pour tout $t < T_m$. La fonction croissante y est donc croissante, majorée par 0. Elle est donc bornée, ce qui prouve que $T_m = +\infty$, et elle a une limite ℓ quand $t \rightarrow +\infty$, avec $\ell \leq 0$. Cette limite doit être un point d'équilibre et donc $\ell = 0$.

On suppose dans toute la suite que $y_0 > 0$.

3. Montrer que la solution maximale est globale, c'est-à-dire que $T_m = +\infty$.

Corrigé – Ici aussi, comme 0 est un point d'équilibre de (1), on a $y(t) > 0$ pour tout $t < T_m$.

On suppose maintenant que $T_m < +\infty$, on en déduit que $y(t) = |y(t)| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T_m$. Il existe donc t_0 tel que $y(t) > 2$ pour tout $t \geq t_0$. On a donc $y'(t) = y(t)^2(a(t) - y(t)) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$. La fonction y est donc décroissante sur $[t_0, T_m[$, ce qui donne $y(t) \leq y(t_0)$ pour tout $t_0 \leq t < T_m$, ce qui est incompatible avec $y(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T_m$. On a donc $T_m = +\infty$.

4. Soit $\varepsilon > 0$.

- (a) Montrer qu'il existe $t_1 \geq 0$ t.q. $y(t_1) \geq 1 - \varepsilon$. Puis montrer que $y(t) > 1 - \varepsilon$ pour tout $t > t_1$.

Corrigé – On raisonne par l'absurde, si $y(t) < 1 - \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. La fonction y est alors strictement croissante (car $y'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$). Elle a donc une limite à l'infini notée ℓ , $0 < \ell \leq 1 - \varepsilon$.

En écrivant, $y(t+1) - y(t) = y'(\theta_t) \geq y(\theta_t)^2(1 - y(\theta_t))$ pour θ_t donné par le TAF, on obtient une contradiction quand $t \rightarrow +\infty$.

Il existe donc $t_1 \geq 0$ t.q. $y(t_1) \geq 1 - \varepsilon$. Comme ε est arbitraire on peut même supposer $y(t_1) > 1 - \varepsilon$.

Après t_1 , la fonction y ne peut pas revenir au point $1 - \varepsilon$. Ici encore on peut raisonner par l'absurde en prenant t^ tel que $y(t^*) = 1 - \varepsilon$ et $y(t) > 1 - \varepsilon$ pour $t_1 < t < t^*$. La contradiction vient en regardant le signe de $y'(t^*)$ ($y'(t^*) \leq 0$ par choix de t^* et $y'(t^*) > 0$ par l'équation).*

- (b) Montrer qu'il existe $t_2 \geq 0$ t.q. $y(t_2) \leq 2 + \varepsilon$. Puis montrer que $y(t) < 2 + \varepsilon$ pour tout $t > t_2$.

Corrigé – Raisonnement similaire.

5. Déduire de la question précédente que le point stationnaire 0 n'est pas uniformément stable. (On rappelle que 0 est uniformément stable si pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. $|y_0| \leq \delta$ implique $\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq \eta$.)

Corrigé – On prend par exemple $\eta = 1/2$ et on a pour tout $y_0 > 0$, $\sup_{t \geq 0} |y(t)| > \eta = 1/2$.

6. On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \ell$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \ell$.

Indication : Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ t.q. $\ell - \varepsilon \leq a(t) \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$. Puis, en reprenant méthode de la question 4, montrer qu'il existe $t_3 > t_0$ t.q. $\ell - 2\varepsilon \leq y(t) \leq \ell + 2\varepsilon$ pour tout $t > t_3$.

Corrigé – Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \ell$, il existe $t_0 > 0$ t.q. $\ell - \varepsilon \leq a(t) \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

On reprend alors la méthode de la question 4 à partir de t_0 et en remplaçant $1 \leq a(t) \leq 2$ par $\ell - \varepsilon \leq a(t) \leq \ell + \varepsilon$.

On obtient l'existence de $t_3 > t_0$ t.q. $\ell - 2\varepsilon \leq y(t) \leq \ell + 2\varepsilon$ pour tout $t > t_3$.

Ceci montre bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \ell$.

7. (Question plus difficile).

On suppose dans cette question que a est uniformément continue et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \ell$.

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \ell$.

Corrigé – Soit m un point d'adhérence de $a(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(t_n) = m$.

Si $m \neq \ell$, on choisit $\varepsilon = |m - \ell|/2$ et $\delta > 0$ t.q. $|t - s| \leq \delta \Rightarrow |a(t) - a(s)| \leq \varepsilon$.

En écrivant, $y(t_n + \delta) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + \delta} y'(s) ds = \int_{t_n}^{t_n + \delta} y(s)^2 (a(s) - y(s)) ds$, on obtient une contradiction quand $n \rightarrow +\infty$.

Ceci montre que $m = \ell$, ce qui est suffisant pour dire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \ell$.

Exercice 2 (Etude de stabilité pour un système. Barème 9 points).

On considère le système suivant, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t), \\ y'(t) &= y(t) - x(t)^2. \end{aligned}$$

1. Trouver l'unique point d'équilibre $P = (a, b)$, avec $a > 0, b > 0$.

Corrigé – Il s'agit du point $P = (1, 1)$.

2. Linéariser le système autour du point d'équilibre P (trouvé à la question 1). Résoudre le système linéarisé et tracer 3 ou 4 trajectoires proches de P .

Corrigé – La matrice A du système linéarisé au point P est $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Les valeurs propres de A sont

$\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. On peut prendre comme vecteurs propres associée $\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

La solution générale du système linéarisé au point P est donc, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + \beta e^{\lambda_2 t} \varphi_2.$$

3. Discuter la stabilité du point d'équilibre P (trouvé à la question 1).

Corrigé – Comme $\lambda_2 > 0$, le point d'équilibre P est instable.