Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
Partiel du vendredi 23 octobre 2020

Le partiel contient 3 exercices. Le barème est sur 23 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.

Exercice 1 (Dynamique des populations, barème 10 points)**.**
Soient α, $a \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $0 < \alpha(t) < 1$ et $a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $y_0 > 0$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$y'(t) = y(t)(\alpha(t) - y(t))a(t), \ t > 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

1. Montrer que le problème (1)-(2) admet une unique solution maximale. Cette solution est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$. Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

   Corrigé – *La fonction $f : t, x \mapsto x(\alpha(t) - x)a(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée par rapport à son deuxième argument est continue. La fonction f est donc localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument (proposition 1 du 2eme cours). Les théorèmes du cours donnent alors l'existence et l'unicité d'une solution maximale.*
   La fonction nulle est la trajectoire d'une solution de l'équation. Comme les trajactoires ne se rencontrent pas et que $y_0 > 0$, on en déduit que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

2. On suppose dans cette question que la fonction α est constante. Montrer que la solution maximale trouvée à la question 1 est globale (c'est-à-dire que $T_m = +\infty$).

   Corrigé – *Si $y_0 = \alpha$, $y(t) = \alpha$ pour tout t, la solution est globale.*
   Si $y_0 < \alpha$, la solution maximale reste entre les deux points stationnaires 0 et α. Elle n'explose pas en T_m et donc $T_m = +\infty$.
   Si $y_0 > \alpha$, la solution reste au dessus de α. On a donc $y'(t) < 0$ pour tout t. Ceci montre qu'elle est décroissante et donc qu'elle reste entre y_0 et le point stationnaire α. Elle n'explose pas en T_m et donc $T_m = +\infty$.

3. On ne suppose plus que la fonction α est constante.
   (a) on suppose dans cette question que $y_0 < 1$. Montrer que $y(t) < 1$ pour tout $t \in [0, T_m[$.
   [On pourra raisonner par contradiction. Poser $t^\star = \min\{t \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(t) \geq 1\}$ (de sorte que $t^\star > 0$ et $y(t) < 1$ si $t < t^\star$) et montrer que $y(t^\star) = 1$, $y'(t^\star) \geq 0$ et $y'(t^\star) < 0$, ce qui est impossible].
   En déduire que $T_m = +\infty$.

   Corrigé – *On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $y(t) \geq 1$. On pose alors $t^\star = \inf\{t \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(t) \geq 1\}$. Par continuité de y, on a $y(t^\star) \geq 1$ (ceci montre que "inf" est aussi "min"). Si $y(t^\star) > 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires (et le fait que $y(0) < 1$) il existe $t \in]0, t^\star[$ tel que $y(t) = 1$, ce qui contredit la définition de $t^\star$. Donc, $y(t^\star) = 1$.*
   On remarque maintenant que $y'(t^\star) \geq 0$ car $y(t) - y(t^\star) = y(t) - 1 < 0$ si $t < t^\star$ et que $y'(t^\star) = (\alpha(t^\star) - 1)a(t^\star) < 0$. On obtient bien une contradiction.
   Comme la solution reste bloquée entre 0 et 1, on en déduit que $T_m = +\infty$.

   (b) on suppose dans cette question que $y_0 \geq 1$. Montrer que $y(t) < y_0$ pour tout $t \in]0, T_m[$.
   En déduire que $T_m = +\infty$.

Corrigé – *Comme $y_0 \geq 1$ et $\alpha(0) < 1$, $y_0(\alpha(0) - y_0) < 0$. Par continuité de y, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $y(t)(\alpha(t) - y(t)) < 0$ pour $t \in [0, \varepsilon]$. On en déduit que $y(t) < y_0$ pour $t \in [0, \varepsilon]$.*

On raisonne maintenant de nouveau par contradiction. Si il existe $t \in]0, T_m[$ tel que $y(t) \geq y_0$, on pose $t^\star = \inf\{t \in]0, +\infty[$ tel que $y(t) \geq y_0\}$. On remarque que $t^\star \geq \varepsilon > 0$. Par continuité de y, on a $y(t^\star) \geq y_0$. (En fait, on peut aussi montrer que $y(t^\star) = y_0$.)

Comme dans la question précédente, on montre que $y'(t^\star) \geq 0$ (car $y(t) < y_0 \leq y(t^\star)$ si $t < t^\star$) et $y'(t^\star) = y(t^\star)(\alpha - y(t^\star))a(t^\star) < 0$, ce qui est impossible.

Comme la solution reste bloquée entre 0 et y_0, on en déduit que $T_m = +\infty$.

4. On suppose à nouveau, dans cette question, que la fonction α est constante et on note y la solution de (1)-(2)

   (a) On suppose dans cette question qu'il existe $a_0 > 0$ tel que $a(t) \geq a_0$ pour tout $t > 0$.
   Montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \alpha$.

   Corrigé – *Si $y_0 = \alpha$, $y(t) = \alpha$ pour tout t (et donc $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \alpha$).*

   Si $y_0 < \alpha$, la fonction y est strictement croissante majorée par α. Elle a donc une limite que l'on note ℓ avec $\ell \in]y_0, \alpha]$.

   Si $y_0 > \alpha$, la fonction y est strictement décroissante minjorée par α. Elle a donc une limite que l'on note aussi ℓ avec $\ell \in [\alpha, y_0[$.

   Dans les deux cas, on peut noter que $\ell \neq 0$.

   On utilise le théorème des accroissents finis entre t et $t+1$, il existe $\theta_t \in]t, t+1[$ tel que
   $$y(t+1) - y(t) = y'(\theta_t),$$
   et donc
   $$a_0 \geq a(\theta_t) = \frac{y(t+1) - y(t)}{y(\theta_t)(\alpha - y(\theta_t))}.$$
   Quand $t \to +\infty$, $\theta_t \to +\infty$ et $y(\theta_t) \to \ell$. On en déduit que le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 (en contradiction avec $a_0 > 0$) sauf si $\ell = \alpha$.

   (b) (On ne suppose plus l'existence de a_0.) On suppose $y_0 \neq \alpha$.
   Montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \alpha$ si et seulement si $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t a(s)ds = +\infty$.

   Corrigé – *Il est possible,de calculer la solution avec la méthode des variables séparables, Si $y_0 \neq \alpha$, on a alors $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq \alpha$ pour tout t et l'équation sécrit*
   $$\frac{y'(t)}{y(t)(\alpha - y(t))} = a(t) \text{ pour tout } t > 0.$$
   Ce qui donne (avec une décomposition en éléments simples)
   $$\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{\alpha - y(t)} = \alpha a(t) \text{ pour tout } t > 0.$$
   Dans le cas $y(t) < \alpha$ pour tout t, ceci donne
   $$(\ln \frac{y}{\alpha - y})' = \alpha a.$$
   En notant A la primitive de a s'annulant en 0, c'est-à-dire $A(t) = \int_0^t a(s)ds$, on obtient que la fonction $\ln \frac{y}{\alpha - y} - \alpha A$ est constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\frac{y}{\alpha - y} = Ce^{\alpha A},\ y = \frac{\alpha C e^{\alpha A}}{1 + Ce^{\alpha A}}.$$
   La valeur de C se calcule en utilisant $y(0) = y_0$,
   $$y(t) = \frac{\alpha y_0}{y_0 + (\alpha - y_0)e^{-\alpha A(t)}}$$
   On trouve la même formule si $y(t) > \alpha$ pour tout t.

Si $\lim_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$*, on déduit de cette formule* $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \alpha$.
Si $\lim_{t\to+\infty} A(t) = \gamma < +\infty$*, on déduit de cette formule*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{\alpha y_0}{y_0 + (\alpha - y_0)e^{-\alpha\gamma}} \neq \alpha.$$

Exercice 2 (Petits exemples, barème 6 points)**.**

1. On considère l'équation différentielle du deuxième ordre

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \psi(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

   (a) Donner la solution générale de l'équation homogène associée

   Corrigé – *Le polynôme caratéristique est* $r^2 + 3r + 1$ *dont la racine double est* -1
   La solution générale de l'équation homogène associée est donc la fonction

$$t \mapsto y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t},$$

   avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) Donner une solution particulière de (3) avec $\psi(t) = e^{2t}$.

   Corrigé – *On cherche une solution particulière associée à* e^{2t} *sous la forme* $y_1 = \alpha e^{2t}$*. La condition sur* α *est alors* $4\alpha + 4\alpha + \alpha = 9\alpha = 1$*, c'est-à-dire* $\alpha = 1/9$, $y_1(t) = (1/9)e^{2t}$.

   (c) Donner une solution particulière de (3) avec $\psi(t) = e^{-t}$.

   Corrigé – *On cherche une solution particulière associée à* e^{-t} *sous la forme* $y_2(t) = \alpha t^2 e^{-t}$ *(car les fonctions* e^{-t} *et* te^{-t} *sont solutions de l'équation homogène).*
   Ceci donne
   $y_2'(t) = -\alpha t^2 e^{-t} + \alpha 2te^{-t}$,
   $y_2''(t) = \alpha t^2 e^{-t} - \alpha 4te^{-t} + \alpha 2e^{-t}$.
   La condition sur α *est alors* $2\alpha = 1$*, c'est-à-dire* $\alpha = 1/2$, $y_2(t) = (1/2)t^2 e^{-t}$.

   (d) Donner la solution générale de (3) avec $\psi(t) = e^{2t} + e^{-t}$.

   Corrigé – *La solution générale de l'équation non homogène est donc la fonction*

$$t \mapsto y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + (1/9)e^{2t} + (1/2)t^2 e^{-t}.$$

   avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) - 2ty(t) = e^{t^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Donner la solution générale de l'équation homogène associée.

   Corrigé – *La solution générale de l'équation homogène s'obtient avec la primitive de* $-2t$ *c'est la fonction*

$$t \mapsto Ce^{t^2},$$

   avec $C \in \mathbb{R}$.

   (b) Donner la solution générale de l'équation complète.

Corrigé – *On peut chercher une solution particulière avec la méthode de réduction d'ordre (appelée aussi ici "variation de la constante"), c'est-à-dire sous la forme* $y_p(t) = z(t)e^{t^2}$.

Comme $y_p'(t) = z'(t)e^{t^2} + 2tz(t)e^{t^2}$, *la condition sur* z *est* $z'(t) = 1$. *on peut donc prendre* $z(t) = t$ *et* $y_p(t) = te^{t^2}$.

La solution générale de l'équation complète est donc la fonction

$$t \mapsto Ce^{t^2} + te^{t^2},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Une équation linéaire du 2ème ordre, barème 7 points)**.**
On s'intéresse à l'équation, pour $y \in C^2(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$,

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = 0,\ t > 0. \tag{4}$$

1. Montrer que les théorèmes vus en cours permettent de montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (4) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension 2.

   Corrigé – *En divisant léquation par* t^2, *on est ramené à une équation du type* $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, $\in I = \mathbb{R}_+^\star$. *Les fonctions* a *et* b *sont continues sur* I *et on un théorème du cours s'applique pour montrer que l'ensemble des solutions de l'équation* (4) *forme un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) de dimension* 2.

2. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi la fonction $y_1 : t \mapsto t^\alpha$ est solution de (4).

   Corrigé – *La fonction* y_1 *est solution si et seulement si* $\alpha(\alpha-1)+3\alpha+1 = \alpha^2+2\alpha+1 = 0$, *c'est-à-dire* $\alpha = -1$

3. On cherche maintenant une seconde solution de (4), notée y_2, linéairement indépendante de la fonction y_1 trouvée à la question précédente. On cherche y_2 en utilisant la technique de "réduction d'ordre", c'est-à-dire que l'on pose, pour tout $t > 0$, $y_2(t) = z(t)y_1(t)$.

   (a) Montrer que y_2 est solution de (4) si et seulement $tz''(t) + z'(t) = 0$ pour tout $t > 0$.

   Corrigé –
   $y_2 = zy_1$,
   $y_2' = zy_1' + z'y_1$,
   $y_2'' = zy_1'' + 2z'y_1' + z''y_1$.
   La fonction y_2 *est donc solution de* (4) *si et seulement si* $t^2y_1z'' + (2t^2y_1' + 3ty_1)z' = 0$, *c'est-à-dire*

   $$tz''(t) + z'(t) = 0,\ t > 0.$$

   (b) Déduire de la question précédente, une fonction y_2, linéairement indépendante de la fonction y_1, solution de (4).

   Corrigé – *En supposant* $z' > 0$ *on obtient* $z''(t)/z'(t) = -1/t$, *c'est-à-dire* $(\ln(z')')(t) = -1/t$. *Une solution est donc obtenue en prenant* $\ln(z'(t)) = -\ln(t)$, *et donc*

   $$z'(t) = e^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}.$$

   Une solution possible est $z(t) = \ln(t)$ *et*

   $$y_2(t) = \frac{\ln(t)}{t} \text{ pour tout } t > 0.$$

   Les deux solutions y_1 *et* y_2 *sont bien linéairement indépendantes (car la fonction* $t \mapsto \ln(t)$ *est non constante).*

4. Donner l'ensemble des solutions de (4).

   Corrigé – *La solution générale de l'équation* (4) *est la fonction* $t \mapsto (C_1 + C_2 \ln(t))/t$ *avec* C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

5. Donner l'ensemble des solutions de l'équation non homogène

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = \frac{1}{t^2},\ t > 0.$$

   Corrigé – *On cherche une solution particulière sous la forme* $y_p(t) = \gamma/t^2$. *Comme* $y_p'(t) = -2\gamma t^{-3}$ *et* $y_p''(t) = 6\gamma t^{-4}$, *La condition sur* γ *est alors*

$$6\gamma - 6\gamma + \gamma = 1,$$

   c'est-à-dire $\gamma = 1$ *et* $y_p = 1/t^2$.
   La solution générale de l'équation non homogène est donc la fonction

$$t \mapsto \frac{C_1 + C_2 \ln(t)}{t} + \frac{1}{t^2},$$

   avec C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.