**Université de Marseille**
**Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires**
**SMI5U06C. Examen du 10 janvier 2022**

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 24 points. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée.

**Exercice 1** (Encadrement de la solution exacte par Euler explicite et implicite, barème 8 points)**.** On considère le problème de Cauchy

$$x'(t) = 1 - x(t),\ t > 0, \tag{1}$$
$$x(0) = 0. \tag{2}$$

1. Calculer la solution de ce problème.

   *Corrigé –* $x(t) = 1 - e^{-t}$.

Soit $0 < h < 1$. On discrétise le problème (1)-(2) par les schémas d'Euler explicite et implicite de pas $h$.
Pour $k \geq 0$, on pose $t_k = kh$ et on note $y_k$ la solution approchée au temps $t_k$ donnée par le schéma d'Euler explicite et $z_k$ celle donnée par le schéma d'Euler implicite.

2. Ecrire les formules permettant le calcul de $\{y_k,\, k \geq 0\}$ et $\{z_k,\, k \geq 0\}$.

   *Corrigé –* $y_0 = 0$, $z_0 = 0$.
   *EE : Pour* $k \geq 0$, $y_{k+1} = y_k + h(1 - y_k)$ *et donc* $y_{k+1} = (1-h)y_k + h$.
   *EI : Pour* $k \geq 0$, $z_{k+1} = z_k + h(1 - z_{k+1})$ *et donc* $z_{k+1} = \frac{z_k + h}{1+h}$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = x(t_k)$ ($x$ est la solution exacte du problème (1)-(2)) Le but cette question est de montrer que
$$z_k \leq x_k \leq y_k, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

   (a) Question préliminaire. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$.

   *Corrigé – Pour* $x \geq 0$, *on pose* $f(x) = 1 - x - e^{-x}$ *et* $g(x) = (1+x)e^{-x}$ *de sorte que* $f(0) = 0$ *et* $g(0) = 1$. *Puis, pour* $x > 0$, $f'(x) = -1 + e^{-x} < 0$ *et* $g'(x) = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x} < 0$. *ceci prouve que* $f(x) \leq f(0) = 0$ *et* $g(x) \leq g(0) = 1$ *pour tout* $x \geq 0$ *et donne les inégalités demandées.*

   (b) Montrer par récurrence sur $k$ que $y_k \geq x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   *Corrigé –* $y_0 - x_0 = 0$. *Puis, si* $y_k - x_k \geq 0$, *comme* $x_{k+1} - x_k = e^{-t_k}(1 - e^{-h})$,
   $y_{k+1} = (1-h)y_k + h$
   $x_{k+1} = (1-h)x_k + hx_k + e^{-t_k}(1 - e^{-h})$
   $y_{k+1} - x_{k+1} = (1-h)(y_k - x_k) + h(1 - x_k) - e^{-t_k}(1 - e^{-h}) = (1-h)(y_k - x_k) + e^{-t_k}(-1 + h + e^{-h}) \geq 0$,
   *car* $(1-h) > 0$ *et* $-1 + h + e^{-h} > 0$ *par la question 3a.*

   (c) Montrer par récurrence sur $k$ que $z_k \leq x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   *Corrigé –* $z_0 - x_0 = 0$. *Puis, si* $z_k - x_k \leq 0$, *comme* $x_{k+1} - x_k = e^{-t_k}(1 - e^{-h})$,
   $(1+h)z_{k+1} = z_k + h$
   $(1+h)x_{k+1} = x_k + (x_{k+1} - x_k) + hx_{k+1}$
   $(1+h)(z_{k+1} - x_{k+1}) = (z_k - x_k) + h(1 - x_{k+1}) - e^{-t_k}(1 - e^{-h}) = (z_k - x_k) + e^{-t_k}(he^{-h} - 1 + e^{-h}) \leq 0$,
   *car* $-1 + he^{-h} + e^{-h} < 0$ *par la question 3a.*

NB : La preuve de l'encadrement (3) peut s'adapter au problème de Cauchy vu au TP2, c'est-à-dire au problème, pour $\mu > 0$ et $x_0 > 0$ donnés, $x'(t) = 1 - \frac{x(t)}{\mu}$ pour tout $t > 0$ et $x(0) = x_0$.

**Exercice 2** (Recherche de $M \in C^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que $M' = AM$, barème 8 points)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^\star$). On suppose que les valeurs propres de $A$ sont réelles et on les note (comptées avec leur multiplicité algébrique) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
On note $X$ la solution du système différentiel linéaire suivant :

$$X'(t) = BX(t), \; t > 0, \tag{4}$$
$$X(0) = e_1. \tag{5}$$

avec $B = (b_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $b_{k,k} = \lambda_k$ pour $k = 1, \ldots, n$, $b_{k+1,k} = 1$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et tous les autres coefficients de $B$ nuls. Le vecteur $e_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$.
On note $x_1, \ldots, x_n$ les composantes de $X$, c'est-à-dire $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$.

1. Calculer $x_1(t)$ pour tout $t \geq 0$.

   *Corrigé –* $x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t)$ *et* $x_1(0) = 1$. *Donc,* $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$.

2. Donner, pour $k = 2, \ldots, n$ et $t \geq 0$, l'expression de $x_k(t)$ en fonction de $\{x_{k-1}(s), 0 \leq s \leq t\}$.

   *Corrigé – Pour* $k \geq 2$, $x_k'(t) = \lambda_k x_k(t) + x_{k-1}(t)$.
   *En posant* $x_k(t) = C(t)e^{\lambda_k t}$, *on trouve* $C'(t)e^{\lambda_k t} = x_{k-1}(t)$, *on en déduit* $C(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k s} x_{k-1}(s) ds$ *et donc, pour tout* $t \geq 0$,
   $$x_k(t) = x_k(0)e^{\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k (t-s)} x_{k-1}(s) ds.$$
   *(On retrouve ainsi la formule de Duhamel vue en cours.)*
   *Enfin, comme* $x_k(0) = 0$, $x_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_k (t-s)} x_{k-1}(s) ds$.

   [On pourra utiliser la méthode dite de "variation de la constante" ou de "réduction d'ordre"]

Les questions suivantes sont indépendantes des questions 1 et 2.

On note $P_A$ le polynôme caractéristique de $A$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On définit les matrices $Q_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k = 0, \ldots, n$, par $Q_0 = \mathrm{I}$ et $Q_k = Q_{k-1}(A - \lambda_k \mathrm{I})$ pour $k = 1, \ldots, n$.
On définit pour tout $t \geq 0$ la matrice $M(t)$ par $M(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) Q_{k-1}$.

3. Montrer que $Q_n = \prod_{k=1}^n (A - \lambda_k \mathrm{I}) = P_A(A)$.

   *Corrigé – Dans l'ensemble* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *le nombre d'apparition d'une valeur propre* $\lambda$ *est égal à sa multiplicité algébrique* $m_a(\lambda)$. *En notant* $\mathrm{vp}(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de* $A$, *ceci montre que*
   $$Q_n = \prod_{\lambda \in \mathrm{vp}(A)} (A - \lambda \mathrm{I})^{m_a(\lambda)} = P_A(A).$$

La question 3 donne $Q_n = 0$ (c'est le théorème de Cayley-Hamilton).

4. Calculer $M(0)$.

   *Corrigé – Comme* $x_1(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ *pour* $k > 1$ *et* $Q_0 = \mathrm{I}$, $M(0) = \sum_{k=1}^n x_k(0) Q_{k-1} = \mathrm{I}$.

5. Montrer que, pour tout $t > 0$, $M'(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(t) Q_{k-1} + \sum_{k=1}^n x_k(t) Q_k$.

   *Corrigé –* $M'(t) = \sum_{k=1}^n x_k'(t) Q_{k-1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(t) Q_{k-1} + \sum_{k=2}^n x_{k-1}(t) Q_{k-1}$.
   *En rappelant que* $Q_n = 0$ *ceci donne*
   $$M'(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(t) Q_{k-1} + \sum_{k=1}^n x_k(t) Q_k.$$

6. Montrer que, pour tout $t > 0$, $M'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) Q_{k-1} A = M(t)A$.

   *Corrigé –* *Comme* $Q_k = Q_{k-1}(A - \lambda_k \mathrm{I})$,
   $$M'(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t) Q_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} x_k(t) Q_{k-1}(A - \lambda_k \mathrm{I}) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) Q_{k-1} A = M(t)A.$$

7. Peut-on affirmer que $M'(t) = AM(t)$ pour tout $t > 0$ ?

   *Corrigé –* *Oui, car* $A$ *commute avec* $\mathrm{I}$ *et avec lui même et donc* $A$ *commute avec toutes les matrices* $Q_k$.

**Exercice 3** (Equation non linéaire du pendule, barème 8 points)**.**
On s'intéresse au système non linéaire de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t),\ t > 0, \\ y'(t) &= -\sin(x(t)),\ t > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

A ce système, on ajoute une condition initiale

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{7}$$

Le problème (6)-(7) admet une unique solution maximale.
Cette solution est globale, c'est-à-dire définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
Pour $t \geq 0$, on pose $E(t) = (1/2)y(t)^2 + 1 - \cos(x(t))$.

1. Montrer que $E(t) = E(0)$ pour tout $t \geq 0$.

   *Corrigé –* *Pour tout* $t > 0$, $E'(t) = y(t)y'(t) + \sin(x(t))x'(t) = x'(t)(-\sin(x(t))) + \sin(x(t))x'(t) = 0$.

2. Soit $0 < \eta < 1$ et $z_\eta \in [0, \pi/2[$ t.q. $\cos(z_\eta) = 1 - \eta$. On suppose que $x_0 \in ]-\pi/2, \pi/2[$ et $E(0) \leq \eta$. Montrer que $|x(t)| \leq z_\eta$ pour tout $t \geq 0$.

   *Corrigé –* *Pour tout* $t \geq 0$, $(1/2)y(t)^2 + 1 - \cos(x(t)) = E(t) \leq \eta = 1 - \cos(z_\eta)$. *On a donc* $(1/2)y(t)^2 \leq \cos(x(t)) - \cos(z_\eta)$ *et* $\cos(x(t)) \geq \cos(z_\eta)$.
   *Comme* $x_0 \in ]-\pi/2, \pi/2[$, *ceci prouve que* $|x(0)| \leq z_\eta$. *On en déduit que* $|x(t)| \leq z_\eta$ *pour tout* $t \geq 0$. *En effet, sinon, par continuité de* $x$ *(et par le théorème des valeurs intermédiaires) il existe* $t > 0$ *tel que* $|x(t)| > z_\eta$ *et* $x(t) \in ]-\pi/2, \pi/2[$ *ce qui est impossible car cela donnerait* $\cos(x(t)) < \cos(z_\eta)$.

Pour $\delta \in [0, \pi/2]$, on pose $h(\delta) = (1/2)\delta^2 + 1 - \cos(\delta)$.

3. Soit $\delta \in ]0, \pi/2[$ tel que $0 < h(\delta) < 1$. On suppose dans cette question que $|x_0| \leq \delta$ et $|y_0| \leq \delta$. Montrer que $\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq z_{h(\delta)}$ et $\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq \sqrt{2h(\delta)}$ (où $z_{h(\delta)}$ est donné par la question 2)

   *Corrigé –* *Comme* $|y_0| \leq \delta$ *et* $|x_0| \leq \delta \in ]0, \pi/2[$, *on a* $E(0) \leq h(\delta)$. *La question 2 donne alors* $\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq z_{h(\delta)}$. *Puis comme* $E(t) = E(0)$ *pour tout* $t$ *on a aussi* $(1/2)y(t)^2 \leq h(\delta)$, *ce qui donne* $\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq \sqrt{2h(\delta)}$.

4. Montrer que le point 0 de $\mathbb{R}^2$ est un point stationnaire uniformément stable du système (6). Pouvait-on aussi montrer cette stabilité en étudiant le problème linéarisé en 0 ?

   *Corrigé –* *Soit* $0 < \varepsilon < 1$. *Comme* $h(\delta) \to 0$ *quand* $\delta \to 0$ *et* $z_\eta \to 0$ *quand* $\eta \to 0$, *il existe* $\delta > 0$ *(avec* $\delta \in ]0, \pi/2[$ *et* $0 < h(\delta) < 1$*) tel que* $z_{h(\delta)} \leq \varepsilon$ *et* $\sqrt{2h(\delta)} \leq \varepsilon$. *Pour* $|x_0| \leq \delta$ *et* $|y_0| \leq \delta$, *on a alors, par la question 3,* $\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq \varepsilon$ *et* $\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq \varepsilon$. *Ce qui prouve que* 0 *est un point stationnaire uniformément stable du système* (6).
   *On ne peut pas montrer cette stabilité en étudiant le problème linéarisé en* 0 *car la matrice du système linéarisé a des valeurs propres complexes de partie réelle nulle.*