Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06TC. Examen du 20 juin 2022, 15h30-17h30, Grand Amphi, St-Charles

L'examen contient un seul exercice. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (Existence locale ou globale, approximation par un schéma numérique)**.**
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est croissante et que $f(0) = 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On considère le problème de Cauchy

$$x'(t) = -f(x(t)),\ t > 0, \tag{1}$$
$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

1. Montrer que le problème (1)-(2) admet une solution maximale et que cette solution est globale (c'est-à-dire définie sur $[0, +\infty[$) [*On pourra étudier le signe de f sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.*].

   Corrigé – *Comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence d'une solution maximale. Soit T le temps existence de la solution maximale. Comme f est croissante et que $f(0) = 0$, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. On remarque aussi que 0 est solution de (1). Donc :*
   - *si $x_0 = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T[$ et donc $T = +\infty$ (pas d'explosion).*
   - *si $x_0 > 0$, on a aussi $x(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T[$ par unicité, car la solution ne peut pas croiser $x = 0$, donc x est décroissante et bornée sur $[0, T[$ et on a donc encore $T = +\infty$.*
   - *Enfin si $x_0 < 0$, par le même argument, $x(t) < 0$ pour tout $t \in [0, T]$ par unicité, car la solution ne peut pas croiser $x = 0$, donc x est croissante et bornée sur $[0, T]$ et on a donc encore $T = +\infty$.*

2. On s'intéresse dans cette question à la stabilité de 0.
   ***Rappel : 0n dit que** 0 **est une point stationnaire (uniformément) stable de** (1) **si pour tout** $\varepsilon > 0$ **il existe** $\delta > 0$ **tel que** $|x(0)| \le \delta \Rightarrow \sup_{t \ge 0} |x(t)| \le \varepsilon$. **On dit que** 0 **est un point stationnaire asymptotiquement stable de** (1) **si pour tout** $\varepsilon > 0$ **il existe** $\delta > 0$ **tel que** $|x(0)| \le \delta \Rightarrow \sup_{t \ge 0} |x(t)| \le \varepsilon$ **et** $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.*

   (a) Montrer que 0 est un point stationnaire (uniformément) stable de (1).

   Corrigé –
   Soit $\varepsilon > 0$, si $|x_0| < \varepsilon$, alors $|x(t)| < \varepsilon$ pour tout $t > 0$, ce qui montre la stabilité uniforme de 0.

   (b) On suppose dans cette question que f est strictement croissante. Montrer que 0 est une point stationnaire asymptotiquement stable de (1).

   Corrigé – *Si $x_0 > 0$, la fonction x est (strictement) décroissante et minorée par 0, elle a donc une limite en $+\infty$ notée ℓ, et $0 \le \ell < x_0$. Cette limite doit être une solution stationnaire (il suffit par exemple de passer à la limite sur l'équation $x(t+1) - x(t) = x'(\theta_t) = -f(x(\theta_t))$ avec $\theta_t \in]t, t+1[$ donné par le théorème des accroissements finis pour voir que $f(\ell) = 0$). Comme f st strictement croissante et $f(0) = 0$, on en déduit $\ell = 0$.*
   Le même raisonnement fonctionne si $x_0 < 0$ (avec $x_0 < \ell \le 0$).
   Le point 0 est donc un point stationnaire asymptotiquement stable de (1).

   (c) On suppose dans cette question que $f(s) = |s|s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Peut-on montrer la stabilité de 0 en étudiant l'équation linéarisée ?

   Corrigé – *Comme $f'(0) = 0$ l'équation linéarisée (au point 0) est $x'(0) = 0$. Le point 0 est un point stationnaire (uniformément) stable de l'équation linéarisée mais ceci ne montre pas la stabilité de 0 pour (1).*

   (d) Montrer (en donnant un exemple) que si f est croissante mais non strictement croissante le point stationnaire 0 peut ne pas être asymptotiquement stable.

Corrigé – *Un exemple possible consiste à prendre $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante et telle que $f=0$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Tous les points de l'intervalle $[-1,1]$ sont des points stationnaires et donc pour tout $\delta>0$ $|x(0)|\le\delta \not\Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t)=0$.*

On suppose maintenant $x_0>0$.
Soit $h>0$. On discrétise le problème (1)-(2) par les schémas d'Euler explicite et implicite de pas h.
Pour $k\ge 0$, on pose $t_k=kh$ et on note y_k la solution approchée au temps t_k donnée par le schéma d'Euler explicite et z_k celle donnée par le schéma d'Euler implicite.
Enfin, on pose $x_k=x(t_k)$ (où x est la solution exacte du problème (1)-(2)).

3. Ecrire les formules permettant le calcul de $\{y_k,\, k\ge 0\}$ et $\{z_k,\, k\ge 0\}$.

   Corrigé – *$y_0=x_0$, $z_0=x_0$.*
   EE : Pour $k\ge 0$, $y_{k+1}=y_k-hf(y_k)$.
   EI : Pour $k\ge 0$, $z_{k+1}=z_k-hf(z_{k+1})$ et donc $z_{k+1}+hf(z_{k+1})=z_k$.

4. (Etude du schéma implicite)

   (a) Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$ il existe un unique $z\in\mathbb{R}$ tel que $z+hf(z)=a$. En déduire que la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   Corrigé – *La fonction de ($\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $z\mapsto z+hf(z)$ est strictement croissante, continue, tend vers $+\infty$ quand z tend vers $+\infty$ et tend vers $-\infty$ quand z tend vers $-\infty$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que tout $a\in\mathbb{R}$ il existe un unique $z\in\mathbb{R}$ tel que $z+hf(z)=a$.*
   La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

   (b) Montrer par récurrence sur k que $z_k\ge x_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

   Corrigé – *La fonction x est décroissante et f est croissante, $x_{k+1}-x_k=-\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t))dt\le -hf(x_{k+1})$ et donc $x_{k+1}+hf_{x_{k+1}}\le x_k$. Comme $z_{k+1}+hf(z_{k+1})=z_k$ et que la fonction $s\mapsto s+hf(x)$ est croissante, on en déduit que $z_{k+1}\ge x_{k+1}$ si $z_k\ge x_k$. On a donc bien prouvé par récurrence que $z_k\ge x_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ (car $z_0=x_0$).*

5. (Etude du schéma explicite)
   On pose $M=\max\{f'(s),\, s\in[0,x_0]\}$ et on suppose $0<h<1/M$ (noter que $0\le M<+\infty$).

   (a) Montrer que la fonction $s\mapsto s-hf(s)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0,x_0]$.

   Corrigé – *pour $s\in\mathbb{R}$, on pose $g(s)=s-hf(s)$ de sorte que $g'(s)=1-hf'(s)$. Il suffit alors de remarquer que $hf'(s)<1$ si $s\in[0,x_0]$ pour conclure que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0,x_0]$.*

   (b) Montrer que $0<y_k\le x_0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

   Corrigé – *On raisonne par récurrence sur k. On a bien $0<y_0\le x_0$. Puis si $0<y_k\le x_0$, $y_{k+1}=y_k-hf(y_k)\le y_k\le x_0$ (car $f(y_k)\ge 0$) et $y_{k+1}=y_k-hf(y_k)>0$ car la fonction $s\mapsto s-hf(s)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0,y_k]$.*

   (c) Montrer que $y_k\le x_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

   Corrigé – *On raisonne encore par récurrence. On a bien $y_0\le x_0$.*
   On suppose $y_k\le x_k$, comme x est décroissante et f est croissante,
   $x_{k+1}-x_k=-\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t))dt\ge -hf(x_k)$ et donc
   $x_{k+1}\ge x_k-hf(x_k)$.
   Puis, $y_{k+1}=y_k-hf(y_k)\le x_k-hf(x_k)$ car la fonction $s\mapsto s-hf(s)$ est croissante sur l'intervalle $[y_k,x_k]\subset[0,x_0]$ et donc $y_{k+1}\le x_{k+1}$.