Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
Partiel du 5 novembre 2021

Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Les réponses aux questions doivent être justifiées.

Exercice 1 (Existence locale ou globale, équation autonome, barème 8 points)**.**
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que que $f(x) > 0$ si $x > 0$ et que $f(0) = 0$.
Pour $y_0 > 0$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$y'(t) = f(y(t)),\ t > 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

1. Montrer que le problème (1)-(2) admet une unique solution maximale.

Corrigé – *La fonction f est de classe C^1, elle est donc localement lipschitizienne. Les théorèmes de cours donnent bien l'existence d'une unique solution maximale.*

Dans la suite, on note y cette solution maximale. Elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$.

2. Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

Corrigé – *Le point 0 est un point d'équilibre. Comme les trajectoires des solutions de (1) ne se rencontrent pas, la solution de (1)-(2) est strictement positive en tout point.*

3. Montrer que $\lim_{t \to T_m} y(t) = +\infty$.
[Distinguer les cas $T_m < +\infty$ et $T_m = +\infty$.]

Corrigé – *Si $T_m < +\infty$, la solution "explose" en T_m, c'est-à-dire $\lim_{t \to T_m} |y(t)| = +\infty$. La fonction y est non bornée.*
Si $T_m = +\infty$, la fonction y étant croissante, elle a une limite en $+\infty$ qui peut être finie ou égale à $+\infty$. Si cette limite est finie, $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \ell \in]0, +\infty[$. Or les seules limites possibles sont les états stationnaires, et le seul état stationnaire est 0. Ceci se démontre en passant à la limite quand $t \to +\infty$ sur l'équation $y(t+1) - y(t) = y'(\theta_t) = f(y(\theta_t))$, avec $\theta_t \in]t, t+1[$ (l'existence de θ_t est donnée par le théorème des accroissements finis) : on obtient $f(\ell) = 0$. Or ceci est impossible car $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
On a donc $\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$, $x_0 > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $f(x) \geq Cx^\alpha$ pour tout $x \geq x_0$.
Montrer que que $T_m < +\infty$.

Corrigé – *Comme $\lim_{t \to T_m} y(t) = +\infty$, il existe $t_0 \in]0, T_m[$ tel que $y(t) \geq x_0$ pour tout $t \in [t_0, T_m[$. On a donc $y'(t) \geq Cy(t)^\alpha$ et donc $\frac{y'(t)}{y(t)^\alpha} \geq C$ pour tout $t \in [t_0, T_m[$.*
En posant $z(t) = -\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{y(t)^{\alpha-1}}$, ceci donne $z'(t) \geq C$ et donc $z(t) \geq z(t_0) + C(t - t_0)$ pour tout $t \in [t_0, T_m[$.
Comme $z(t) < 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$, ceci prouve que $T_m \leq t_0 - \frac{z(t_0)}{C}$.

Exercice 2 (Une équation linéaire du 2ème ordre, barème 8 points)**.**
On s'intéresse à l'équation, pour $y \in C^2(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$,

$$t^2 y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = 0,\ t > 0. \tag{3}$$

1. Montrer que les théorèmes vus en cours permettent de montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (3) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension 2.

Corrigé – *L'équation peut aussi s'écrire $y''(t) - (3/t)ty'(t) + (4/t)y(t) = 0$. Les théorèmes vus en cours donnent alors que l'ensemble des solutions de cette équation forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension 2.*

2. On cherche une solution y de (3) sous la forme $y(t) = a_n t^n + Q(t)$ avec $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ et Q polynôme de degré strictement inférieur à n. Montrer que le polynôme y est alors nécessairement de degré 2. Donner un tel polynôme. On le note y_1 dans la suite de l'exercice.

   Corrigé – *On cherche y sous la forme $y(t) = a_n t^n + Q(t)$ avec $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ et Q polynôme de degré strictement inférieur à n. Le seul terme de degré n du polynôme $t^2y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t)$ est alors $(n(n-1) - 3n + 4)a_n t^n$. Pour que y soit solution de (3), il faut que ce terme soit nul, c'est-à-dire $n(n-1) - 3n + 4 = n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2 = 0$ et donc $n = 2$.*
   Le polynôme $y_1(t) = t^2$ est solution de (3).

3. On cherche maintenant une seconde solution de (3), notée y_2, linéairement indépendante de la fonction y_1 trouvée à la question précédente. On cherche y_2 en utilisant la technique de “réduction d'ordre”, c'est-à-dire que l'on pose, pour tout $t > 0$, $y_2(t) = z(t)y_1(t)$.

   (a) Donner l'équation que doit satisfaire z' pour que y_2 soit solution de (3).

   Corrigé –
   $y_2(t) = z(t)y_1(t)$,
   $y_2'(t) = z(t)y_1'(t) + z'(t)y_1(t)$,
   $y_2''(t) = z(t)y_1''(t) + 2z'(t)y_1'(t) + z''(t)y_1(t)$,
   et donc $t^2y_2''(t) - 3ty_2'(t) + 4y_2(t) = z''(t)(t^2y_1(t)) + z'(t)(2t^2y_1'(t) - 3ty_1(t)) = z''(t)t^4 + z'(t)t^3 = 0$.
   L'équation que doit satisfaire z' pour que y_2 soit solution de (3) est donc $z''(t)t + z'(t) = 0$
   Une solution de cette équation est $z'(t) = \frac{1}{t}$ et donc une fonction z possible est $z(t) = \ln(t)$ pour tout $t > 0$.

   (b) Donner une fonction y_2, linéairement indépendante de la fonction y_1, solution de (3).

   Corrigé – *On peut choisir y_2 définie par $y_2(t) = \ln(t)t^2$. C'est bien une solution de (3). Elle est linéairement indépendante de la fonction y_1, il suffit pour cela de remarquer que $y_1(1) \neq 0$ et $y_2(1) = 0$.*

4. Donner l'ensemble des solutions de l'équation non homogène

$$t^2y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = t^3, \qquad t > 0.$$

   Corrigé – *Une solution particulière est la fonction $t \mapsto t^3$.*
   La solution générale de l'équation non homogène est donc la fonction $t \mapsto y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + t^3$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Existence locale ou globale, équation non autonome, barème 8 points)**.**
Soit $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.
Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t > 0, \tag{4}$$
$$y(0) = y_0. \tag{5}$$

On note y la solution maximale du problème (4)-(5). Elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que $|f(t,x)| \leq C|x| + D$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$. Montrer que $T_m = +\infty$.

Corrigé – *On suppose que $T_m < +\infty$. Pour tout $t \in [0, T_m[$, $y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s)ds = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$ et donc*

$$|y(t)| \le |y_0| + \int_0^t (C|y(s)| + D)ds \le C \int_0^t |y(s)|ds + \bar{D},$$

avec $\bar{D} = |y_0| + DT_m$. Le lemme de Gronwall vu en cours donne alors $y(t) \le \bar{D}e^{Ct}$ pour tout $t < T_m$. La solution y n'explose pas et T_m, en contradiction avec l'hypothèse $T_m < +\infty$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(t, x)| \le C(1 + |x|)(1 + \ln(1 + |x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \ge 0$.

   (a) Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)(1+\ln(1+x))}$.

   Corrigé –
   La fonction $x \mapsto \ln(1 + \ln(1 + x))$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)(1+\ln(1+x))}$.

   (b) Montrer que $T_m = +\infty$.

   Corrigé – *Pour tout $t \in [0, T_m[$,*

   $$|y(t)| \le |y_0| + C \int_0^t (1 + |y(s)|)(1 + \ln(1 + |y(s)|)ds.$$

   Pour $t \in [0, T_m[$, on pose $\varphi(t) = |y_0| + C \int_0^t (1 + |y(s)|)(1 + \ln(1 + |y(s)|)ds$ de sorte que $0 \le |y(t)| \le \varphi(t) > 0$ et

   $$\varphi'(t) = C(1 + |y(t)|)(1 + \ln(1 + |y(t)|) \le C(1 + |\varphi](t)|)(1 + \ln(1 + |\varphi(t)|).$$

   En posant $h(x) = \ln(1 + \ln(1 + x))$, on a donc $(h \circ \varphi)' \le C$ et donc $h(\varphi(t)) \le h(|y_0|) + Ct$, ce qui donne, pour tout $t \in [0, Tm[$,

   $$|y(t)| \le \varphi(t) \le \exp(\exp(|y_0| + Ct) - 1).$$

   La solution n'explose pas en temps fini et donc $T_m = +\infty$.

3. Dans les questions 1 et 2, on remplace C et D par $C(t)$ et $D(t)$ avec C, $D \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Peut-on montrer que $T_m = +\infty$?

   Corrigé – *Oui, il suffit, si $T_m < +\infty$, de prendre dans les questions précédentes $C = \max_{t \in [0, T_m]} C(t)$ et $D = \max_{t \in [0, T_m]} D(t)$.*