Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06TC. Examen du 6 janvier 2023, 13h-15h. Amphi Marion, St-Charles

L'examen contient 2 exercices. Le barème est sur 26 points. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (Etude d'un sytème. Barème 20 points)**.**
On s'intéresse au système

$$x'(t) = -x(t) + x(t)y(t),\ t > 0, \tag{1}$$
$$y'(t) = -y(t) + x(t)^2,\ t > 0, \tag{2}$$

auquel on ajoute une condition initiale, avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ donnés,

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \tag{3}$$

1. Montrer que le problème (1)-(2)-(3) admet une unique solution maximale.

   Corrigé – *Le système s'écrit sous la forme* $X'(t) = F(X(t))$ *avec* $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ *et, pour* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $F(X) = \begin{bmatrix} -x+xy \\ -y+x^2 \end{bmatrix}$. *On a donc* $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, *et les théorèmes du cours donnent l'existence et l'unicité d'une solution maximale.*

2. Donner les trois points d'équilibre du système (1)-(2).

   Corrigé – *Le point* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *est un point d'équilibre du système si*

   $$-x + xy = 0,$$
   $$-y + x^2 = 0,$$

   c'est-à-dire si $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ou* $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Les points d'équilibre du système (1)-(2) sont-ils stables ?, asymptotiquement stables ?, instables ?

   Corrigé – *Examinons le système linéarisé pour les trois points d'équilibre. La jacobienne de* F *s'écrit* $J_F(x,y) = \begin{bmatrix} -1+y & x \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$. *On a donc* $J_F(0,0) = -\mathrm{Id}$, $J_F(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ *et* $J_F(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.
   Le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *est donc asymptotiquement stable.*
   Le déterminant de $J_F(1,1)$ *et* $J_F(-1,1)$ *est égal à* -2 *et donc les racines sont réelles non nulles et de signe opposé, ce qui prouve que les points* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *sont instables.*

Dans la suite on note x, y la solution maximale du système (1)-(2)-(3) et T_m le temps maximal d'existence de la solution. On a donc $x, y \in C([0, T_m[, \mathbb{R}) \cap C^1(]0, T_m[, \mathbb{R})$ avec $T_m \le +\infty$.

4. On suppose dans cette question que $x_0 = 0$. Donner la solution du problème (1)-(2)-(3).
   Remarquer que $T_m = +\infty$ et que $x(t) = 0$ pour tout $t > 0$.

   Corrigé – *Si* $x_0 = 0$, *on remarque que* $x(t) = 0$ *est solution de* (1) *pour tout* t *et que si* $x(t) = 0$ *pour tout* t, *l'équation* (2) *s'écrit* $y' = -y$, *qui admet une solution globale* $y(t) = y_0 e^{-t}$. *Par le théorème d'unicité, la solution est donc globale et égale à* $X(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 e^{-t} \end{bmatrix}$.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

5. Montrer que $x(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.

   Corrigé – *La question 4 montre que toute la droite $\{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$ est formée de trajectoires du système (1)-(2). Comme les trajectoires dans $\mathbb{R}^2$ de ce système ne se rencontrent pas (sauf si l'une est incluse dans l'autre) on en déduit que $x(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.*

6. Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.
   [On pourra raisonner par l'absurde et considérer $t_\star = \inf\{t > 0 \text{ tel que } y(t) \leq 0\}$.]

   Corrigé – *Supposons qu'il existe un temps t pour lequel $y(t) \leq 0$. Soit $t_\star = \inf\{t > 0 \text{ tel que } y(t) \leq 0\}$. Le choix de $t^\star$ donne $y(t) > 0$ pour tout $t < t^\star$ et $y(t^\star) = 0$, ce qui implique $y'(t^\star) \leq 0$. Mais l'équation (2) donne $y'(t^\star) = -y(t^\star) + x(t^\star)^2 > 0$ (car $y(t^\star) = 0$ et $x(t^\star) > 0$ par la question précédente). On a donc une contradiction, et on en déduit que $y(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.*

7. On suppose dans cette question que $x_0 = y_0$.

   (a) Montrer que $x(t) = y(t)$ pour tout $0 \leq t < T_m$ et donner l'équation satisfaite par x.

   Corrigé – *En prenant pour x la solution maximale du problème de Cauchy*
   $$x'(t) = -x(t) + x(t)^2,\ t > 0, \tag{4}$$
   $$x(0) = x_0, \tag{5}$$
   et $y = x$, on obtient une solution maximale du problème de Cauchy (1)-(2)-(3). Grâce au théorème d'unicité, c'est donc la solution maximale de (1)-(2)-(3).

   (b) On suppose que $x_0 \in]0, 1[$. Montrer que $T_m = +\infty$ et donner la limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$.

   Corrigé – *L'équation (4) admet deux points d'équilibre, 0 et 1. Si $x_0 \in]0, 1[$ alors $x(t)$ reste toujours compris entre 0 et 1 (les trajectoires ne se rencontrent pas). La fonction x est donc décroissante minorée par 0. Ceci prouve que $T_m = +\infty$ et que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \ell \in [0, 1[$. Le nombre ℓ doit être un point d'équilibre et donc $\ell = 0$.*

   (c) On suppose que $x_0 > 1$. Montrer que $T_m < +\infty$ et donner la limite de $x(t)$ quand $t \to T_m$.
   [On pourra remarquer qu'il existe $a > 0$ tel que $x'(t) \geq ax(t)^2$ pour tout $0 < t < T_m$.]

   Corrigé – *Si $x_0 > 1$, alors $x(t) > 1$ pour tout $0 < t < T_m$ (les trajectoires ne se rencontrent pas). La fonction x est donc croissante et $x'(t) \geq x(t)^2 - x(t)(x(t)/x_0)$ c'est-à-dire $x'(t) \geq ax(t)^2$ pour tout $0 < t < T_m$, avec $a = (x_0 - 1)/x_0 > 0$. On en déduit que $T_m \leq 1/(ax_0) = 1/(x_0 - 1)$ et $\lim_{t\to T_m} x(t) = +\infty$.*

8. On suppose dans cette question que $x_0 < y_0$. Montrer que $x(t) < y(t)$ pour tout $0 \leq t < T_m$.

   Corrigé – *La question précédente montre que toute la demi droite $\{(z, z),\ z \geq 0\}$ est formée de trajectoires du système (1)-(2). Comme les trajectoires dans $\mathbb{R}^2$ de ce système ne se rencontrent pas (sauf si l'une est incluse dans l'autre) ceci donne que $x(t) < y(t)$ pour tout $0 \leq t < T_m$.*

9. On suppose dans cette question que $x_0 < y_0 < 1$.

   (a) Montrer $y(t) < 1$ pour tout $0 \leq t < T_m$.
   [On pourra raisonner par l'absurde, comme à la question 6.]

   Corrigé – *On suppose qu'il existe un temps t pour lequel $y(t) \geq 1$. Soit $t_\star = \inf\{t > 0 \text{ tel que } y(t) \geq 1\}$. Le choix de $t^\star$ donne $y(t) < 1$ pour tout $t < t^\star$ et $y(t^\star) = 1$, ce qui implique $y'(t^\star) \geq 0$. Mais l'équation (2) donne $y'(t^\star) = -y(t^\star) + x(t^\star)^2 < 0$ (car $y(t^\star) = 1$ et $x(t^\star)^2 < y(t^\star)^2 = 1$ par la question précédente). On a donc une contradiction et on en déduit que $y(t) < 1$ pour tout $0 \leq t < T_m$.*

(b) Montrer que x et y sont des fonctions décroissantes et que $T_m = +\infty$.
Donner les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand $t \to +\infty$.

Corrigé – *Comme $x'(t) = x(t)(y(t)-1) < 0$ et $y'(t) = -y(t) + x(t)^2 < -y(t) + y(t)^2 = y(t)(y(t)-1) < 0$, Les fonctions x et y sont des fonctions décroissantes minorées par 0. On a donc $T_m = +\infty$ et $\lim_{t\to T_m} x(t) = \ell \in [0,1[$, $\lim_{t\to T_m} y(t) = m \in [0,1[$. Le point (ℓ, m) doit être un point d'équilibre du système (1)-(2) et donc $\ell = m = 0$.*

10. On suppose dans cette question que $1 < x_0 < y_0$.

(a) Montrer que $1 < x(t)$ pour tout $0 \le t < T_m$.

Corrigé – *On suppose qu'il existe un temps t pour lequel $x(t) \le 1$. Soit $t_\star = \inf\{t > 0$ tel que $x(t) \le 1\}$. Le choix de $t^\star$ donne $x(t) > 1$ pour tout $t < t^\star$ et $x(t^\star) = 1$, ce qui implique $x'(t^\star) \le 0$. Mais l'équation (1) donne $x'(t^\star) = -x(t^\star) + x(t^\star)y(t^\star) > 0$ (car $x(t^\star) = 1$ et $x(t^\star)y(t^\star) > x(t^\star)^2 = 1$). On a donc une contradiction et on en déduit que $x(t) > 1$ pour tout $0 \le t < T_m$.*

(b) Montrer que x est une fonction croissante et que $T_m \le 1/(x_0-1)$. Donner la limite de $x(t)$ quand $t \to T_m$.

Corrigé –
Comme $x'(t) = x(t)(y(t)-1) > 0$, la fonction x est croissante. On a donc, avec $a = (x_0-1)/x_0 > 0$,

$$x'(t) = x(t)y(t) - x(t) > x(t)^2 - x(t) \ge x(t)^2 - x(t)\frac{x(t)}{x_0} \ge a x(t)^2.$$

On en déduit que $T_m \le 1/(a x_0) = 1/(x_0-1)$ et $\lim_{t\to T_m} x(t) = +\infty$.

(c) Montrer que $y(t) - x(t) \to 0$ quand $t \to T_m$.

Corrigé – *On pose $z = y - x$, de sorte que $z(t) > 0$ et $z'(t) = -z(t) - x(t)z(t) \le 0$ pour tout $0 \le t < T_m$. La fonction z est décroissante minorée par 0. Soit $\ell = \lim_{t\to T_m} z(t) \ge 0$.*
Si $\ell > 0$, de $\lim_{t\to T_m} x(t) = +\infty$ on déduit $\lim_{t\to T_m} z'(t) = -\infty$. Ceci est impossible en remarquant, par exemple, que pour tout $t > 0$, il existe $\theta_t \in]t, t+1[$ tel que $z(t+1) - z(t) = z'(\theta_t)$ et en faisant $t \to +\infty$.
On a donc $\ell = 0$.

Exercice 2 (Comparaison de schémas numériques. Barème : 6 points)**.**
On s'intéresse à la résolution de numérique du problème suivant, avec $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ donnés,

$$u'(t) = -v(t), \ t > 0, \tag{6}$$
$$v'(t) = u(t), \ t > 0, \tag{7}$$
$$u(0) = u_0, \ v(0) = v_0. \tag{8}$$

Le problème (6)-(7)-(8) a une solution globale que l'on ne demande pas de calculer. On note u, v cette solution (et donc $u, v \in C([0,+\infty[, \mathbb{R}) \cap C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$.) et on définit la fonction φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = u(t)^2 + v(t)^2$.

1. En multipliant (6) par $u(t)$, (7) par $v(t)$ et en additionnant les deux équations obtenues, montrer que φ est une fonction constante.

Corrigé – *Pour tout $t > 0$,*

$$(1/2)\varphi'(t) = u'(t)u(t) + v'(t)v(t) = -v(t)u(t) + u(t)v(t) = 0.$$

La fonction φ est donc une fonction constante.

Soit $h > 0$, on considère dans la suite la discrétisation avec le pas h du problème (6)-(7)-(8) par les schémas numériques d'Euler explicite et implicite et par le schéma de Crank-Nicolson.
Pour chaque schéma et pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n, v_n la solution approchée obtenue au pas de temps $t_n = nh$ et on définit φ_n par $\varphi_n = u_n^2 + v_n^2$.

2. Le schéma d'Euler explicite pour la résolution du système (6)-(8) s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -hv_n, \tag{9}$$
$$v_{n+1} - v_n = hu_n, \tag{10}$$

En multipliant (9) par u_n et (10) par v_n, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = (1+h^2)\varphi_n$.
[on pourra utiliser l'identité, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $ab - b^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{2}$.]

Corrigé – *En multipliant* (9) *par* u_n *et* (10) *par* v_n*, on obtient, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$-hv_nu_n = u_{n+1}u_n - u_n^2 = \frac{u_{n+1}^2}{2} - \frac{u_n^2}{2} - \frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{2} = \frac{u_{n+1}^2}{2} - \frac{u_n^2}{2} - \frac{h^2v_n^2}{2},$$
$$hu_nv_n = v_{n+1}v_n - v_n^2 = \frac{v_{n+1}^2}{2} - \frac{v_n^2}{2} - \frac{(v_{n+1}-v_n)^2}{2} = \frac{v_{n+1}^2}{2} - \frac{v_n^2}{2} - \frac{h^2u_n^2}{2}.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient

$$0 = \frac{\varphi_{n+1}}{2} - \frac{\varphi_n}{2} - h^2\frac{\varphi_n}{2},$$

ce qui donne bien $\varphi_{n+1} = \varphi_n(1+h^2)$.

3. On utilise dans cette question le schéma d'Euler implicite. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \dfrac{\varphi_n}{1+h^2}$.

Corrigé – *Le schéma d'Euler implicite s'écrit pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -hv_{n+1}, \tag{11}$$
$$v_{n+1} - v_n = hu_{n+1}. \tag{12}$$

En multipliant (11) *par* u_{n+1} *et* (10) *par* v_{n+1}*, on obtient, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$-hv_{n+1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_nu_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{2} - \frac{u_n^2}{2} + \frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{2} = \frac{u_{n+1}^2}{2} - \frac{u_n^2}{2} + \frac{h^2v_{n+1}^2}{2},$$
$$hu_{n+1}v_{n+1} = v_{n+1}^2 - v_nv_{n+1} = \frac{v_{n+1}^2}{2} - \frac{v_n^2}{2} + \frac{(v_{n+1}-v_n)^2}{2} = \frac{v_{n+1}^2}{2} - \frac{v_n^2}{2} + \frac{h^2u_{n+1}^2}{2},$$

En additionnant ces deux équations, on obtient

$$0 = \frac{\varphi_{n+1}}{2} - \frac{\varphi_n}{2} + h^2\frac{\varphi_{n+1}}{2},$$

ce qui donne bien $\varphi_{n+1}(1+h^2) = \varphi_n$.

4. On utilise dans cette question le schéma de Crank-Nicolson.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n$.

Corrigé – *Le schéma de Crank-Nicolson s'écrit pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{h}{2}(v_n + v_{n+1}), \tag{13}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{h}{2}(u_n + u_{n+1}). \tag{14}$$

En multipliant (13) *par* $(u_n + u_{n+1})$ *et* (14) *par* $(v_n + v_{n+1})$*, on obtient, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$-\frac{h}{2}(v_n + v_{n+1})(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$
$$\frac{h}{2}(u_n + u_{n+1})(v_n + v_{n+1}) = v_{n+1}^2 - v_n^2.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient

$$0 = \varphi_{n+1} - \varphi_n.$$

5. Rappelez rapidement et graphiquement les résultats obtenus en TP qui illustrent les résultats des trois questions précédentes.

Corrigé – *On a fait tracer en TP l'orbite obtenue pour chacun des schémas, qui correspondent aux résultats obtenus aux trois questions précédentes.*